

**Prototipo con soluzioni del primo esonero del recupero di matematica**

**I) Risolvere i seguenti sistemi di equazioni, tenendo presente che uno è determinato, uno è impossibile ed uno è indeterminato**

$$\left\{ \begin{array}{l} x + y = 5 \\ x + 2y = 0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} x + y = 5 \\ 2x + 2y = 10 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} x + y = 5 \\ 2x + 2y = 0 \end{array} \right.$$

Provate ad osservare bene i tre sistemi.

Spicca subito all'occhio che nel secondo sistema la seconda equazione è ottenuta moltiplicando entrambi i membri della prima per 2.

Cioè la seconda equazione può anche essere espressa come  $2(x + y) = 2 \cdot 5$ .

Dividendo per 2, ottengo la prima equazione....

In altre parole c'è una sola equazione in due incognite che ammette infinite soluzioni ( $x=1, y=4$ ;  $x=0, y=5$ ;  $x=80, y=-75$ .....)....

Se non ve ne foste accorti verrà, alla fine dei calcoli, una uguaglianza che.....è sempre verificata, del tipo  $2=2$ .... Oppure  $0=0$

Nel terzo sistema, invece, posso pensare di scrivere la seconda equazione come  $2(x + y) = 0$

Dividendo per 2, ottengo  $(x + y) = 0$ .

Non può capitare che, contemporaneamente si ha che  $x+y=5$  e  $x+y=0$ , per cui il sistema è impossibile, cioè non ammette soluzioni

Anche qui, potevate non accorgervene.

Alla fine dei passaggi algebrici, vi sarebbe capitata una uguaglianza del tipo  $0=1$  oppure  $8=-9$  che non è vera.

L'unico sistema determinato è, perciò, il primo

Ecco come si può arrivare alla soluzione (è solo uno dei modi):

$$\left\{ \begin{array}{l} x + y = 5 \\ x + 2y = 0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} x = 5 - y \\ 5 - y + 2y = 0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} x = 5 - y \\ 5 + y = 0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} x = 5 - y \\ y = -5 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} x = 5 - (-5) \\ y = -5 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ y = -5 \end{array} \right.$$

**II) Risolvere il seguente sistema di equazioni**

$$\begin{cases} x - y = -4 \\ \frac{x}{3} + \frac{y}{5} = 4 \end{cases}$$

Soluzione proposta:

Per prima cosa, sfruttando le proprietà delle equazioni, eliminiamo i denominatori dalla seconda equazione. Per fare ciò è sufficiente moltiplicare entrambi i termini della stessa per un multiplo di entrambi. Conviene, per avere coefficienti più piccoli, perciò, moltiplicare per 15 che è il mcm tra 3 e 5. Otteniamo, quindi

$$\begin{cases} x - y = -4 \\ 5x + 3y = 60 \end{cases}$$

A questo punto si può applicare uno dei metodi studiati (sostituzione, confronto o riduzione). Nel nostro caso, è opportuno applicare il metodo di sostituzione, ricavando dalla prima equazione  $x = y - 4$  e sostituendola alla  $x$  nella seconda

Otteniamo, perciò:

$$\begin{cases} x = y - 4 \\ 5(y - 4) + 3y = 60 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = y - 4 \\ 8y = 80 \end{cases}$$

Da cui,  $y=10$  (nella seconda equazione) e  $x=6$  (sostituendo  $y=10$  nella prima equazione)

**III) In una stalla ci sono polli e conigli; si contano 48 teste e 142 zampe. Quanti sono i polli e quanti i conigli ?**

Soluzione proposta:

In questo caso bisogna per prima cosa costruire il sistema di equazioni

Se chiamo  $P$  il numero dei polli e  $C$  il numero dei conigli, ottengo

$$\begin{cases} P + C = 48 \\ 2P + 4C = 142 \end{cases}$$

La prima equazione significa che i polli e i conigli debbono essere esattamente tanti quante sono le teste.

La seconda equazione significa che ogni pollo ha due zampe, mentre ogni coniglio ne ha quattro, perciò 2 volte il numero dei polli più quattro volte il numero dei conigli, deve dare il numero di zampe complessive

Per risolvere il sistema, stavolta utilizzo il metodo di riduzione, che si presta molto bene nel caso in cui tutti i coefficienti delle variabili siano numeri interi e diversi da 1 (non è il nostro caso, però, ma alla fine di questo esercizio c'è un esempio ad hoc)

Moltiplico entrambi i termini della prima equazione per -2, e ottengo

$$\begin{cases} -2P - 2C = -96 \\ 2P + 4C = 142 \end{cases} \quad \text{La scelta è stata dettata dal fatto che } 2p-2p=0$$

Sommando le due equazioni, si ottiene l'equazione equivalente

$2C=46$ , da cui  $C=23$ ..... sapendo che le teste sono 48, si avrà che  $P=25$

Quindi i polli sono 25 e i conigli 23..... provare per credere

Ecco l'esempio generico di cui vi parlavo:

Per risolvere un sistema di due equazioni in due incognite... Per prima cosa lo scriviamo in forma normale

$$\begin{cases} \frac{3}{2}x - \frac{1}{10}y = 2 \\ \frac{x}{2} + \frac{y}{3} = \frac{13}{3} \end{cases} \quad \text{moltiplichiamo entrambe le equazioni per il mcm dei denominatori di ciascuno di esse,}$$

cioè, rispettivamente per 10 e per 6

$$\text{Ottenendo} \quad \begin{cases} 15x - y = 20 \\ 3x + 2y = 26 \end{cases} \quad \text{Moltiplicando per 2 i termini della prima ho} \quad \begin{cases} 30x - 2y = 40 \\ 3x + 2y = 26 \end{cases}$$

Sommando le due equazioni, ottengo  $33x=66$ , da cui  $x=2$ .

Sostituendo, poi,  $x=2$  nella equazione  $15x-y=20$ , si ottiene  $y=10$

p.s. In tutti e tre i casi si può verificare l'esattezza della soluzione, andando a sostituire i valori trovati nelle equazioni di partenza...