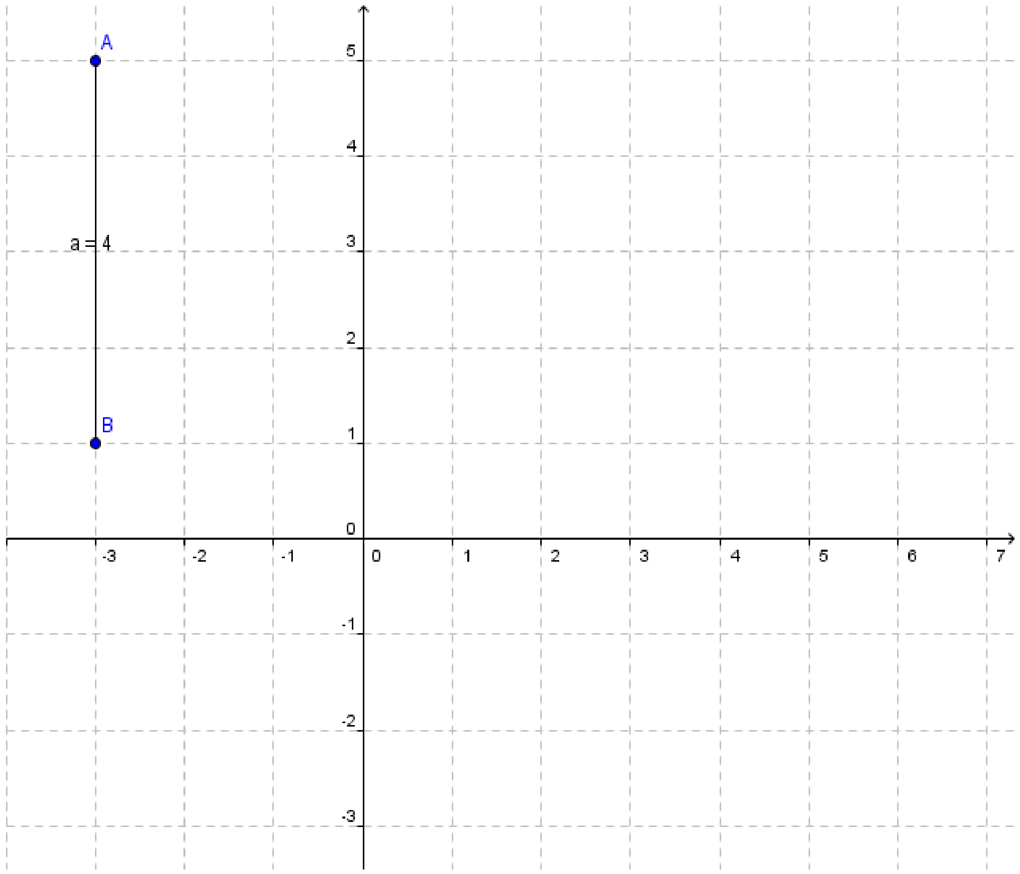
Appunti: **il piano cartesiano**

Distanza tra due punti

Come determinare la distanza AB tra i punti $A(x_A;y_A)$ e $B(x_B;y_B)$:

- Se i due punti A e B hanno la stessa ascissa $x_A=x_B$ allora

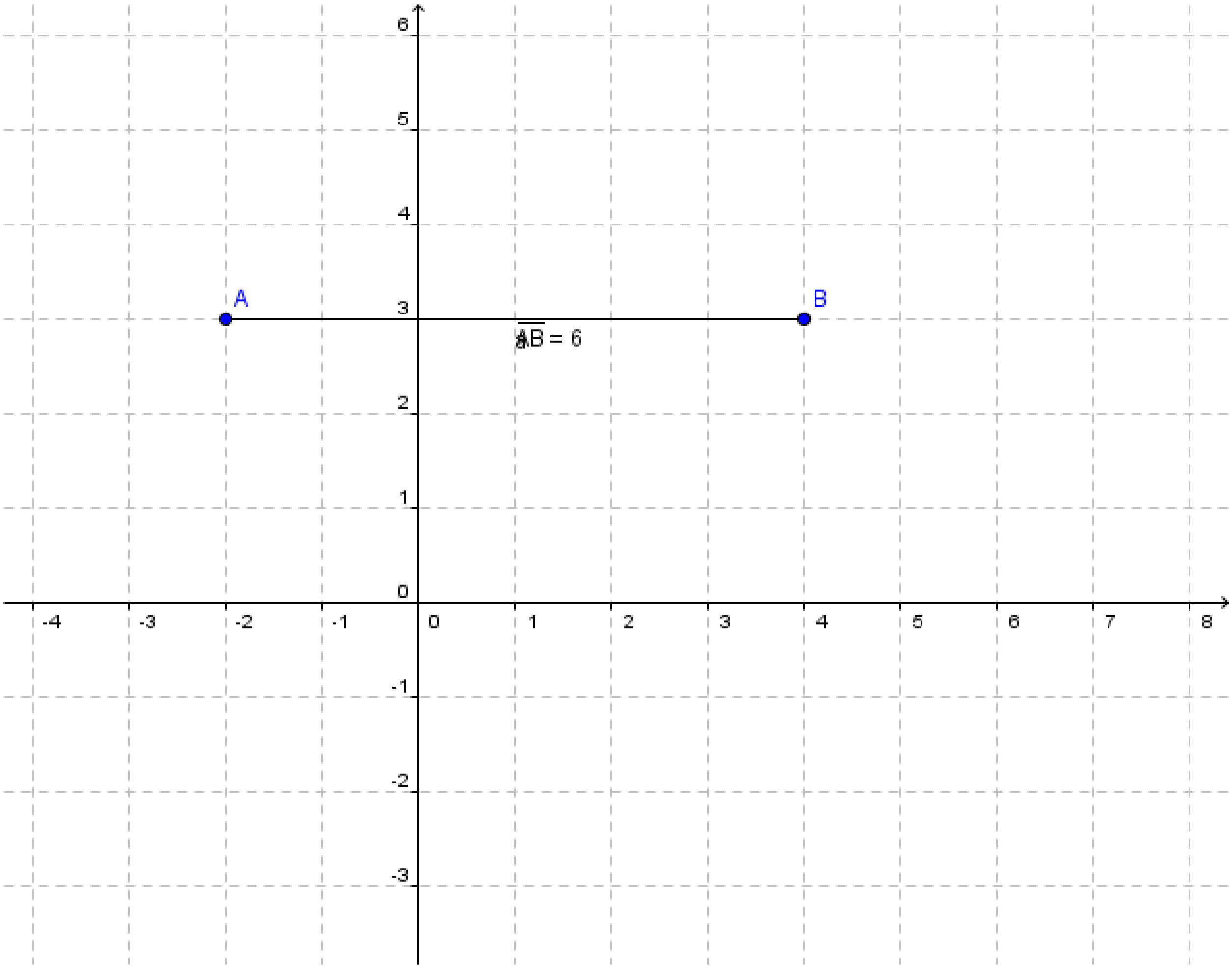


A(-3;1) B(-3; 5)

d(AB)=$\left|y_B - y_A\right|$

d(AB)=$\left|1-5\right| = \left|-4\right| = 4$

- Se i due punti A e B hanno la stessa ordinata $y_A=y_B$ allora



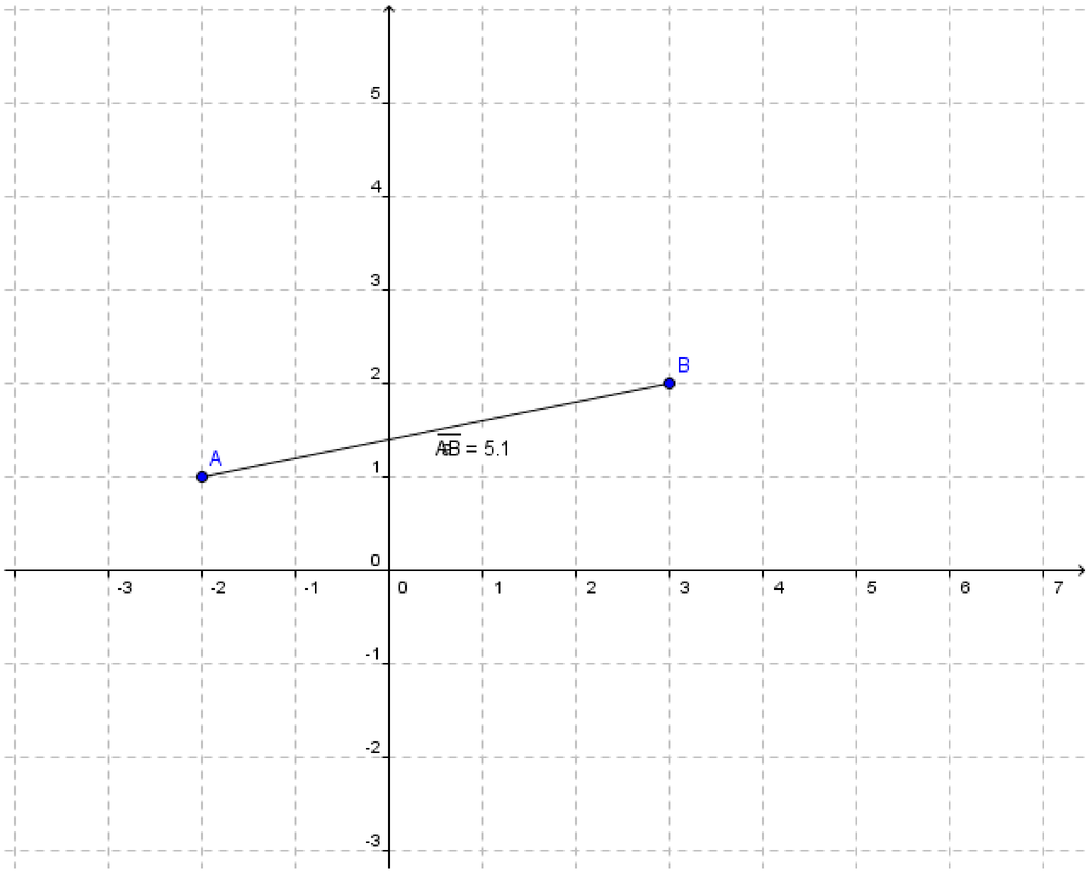
A(-2;3) B(4;3)

d(AB)=$|x_B - x_A|$

d(AB)=$|4-(-2)| = |4+2| = 6$

- Se i due punti A e B non hanno né la stessa ascissa né la stessa ordinata, allora

$$d(AB)=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$$



A(-2;-1); B(3;2)

$$d(AB)=\sqrt{[3-(-2)]^2+[2-(-1)]^2}=\sqrt{5^2+3^2}=\sqrt{25+9}=\sqrt{34}$$

Coordinate del punto medio M

Come determinare le coordinate del punto medio M di un segmento AB sapendo che $A(x_A;y_A)$ e $B(x_B;\ y_B)$:

$$X_M = \frac{x_A + x_B}{2}\ ; \qquad Y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$$

Ex: Dati A(-2;4) e B(4; -2) determinare le coordinate del punto medio del segmento di estremi AB.

$$x_M = \frac{-2+4}{2} = \frac{2}{2} = 1 \qquad y_M = \frac{4-2}{2} = \frac{2}{2} = 1 \qquad \text{ossia} \qquad M(1;1)$$

Baricentro di un triangolo

Come determinare le coordinate del baricentro G di un triangolo di vertici $A(x_A;y_A)$ $B\ (x_B;\ y_B)$ e $C(x_C;y_C)$

$$X_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}\ ; \quad Y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}$$

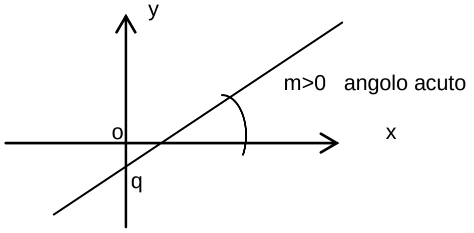
Le rette nel piano cartesiano

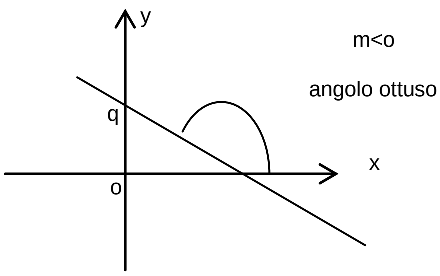
La funzione lineare di equazione **y=mx+q** con m,q $\in$ R ha come grafico una **retta**

Il coefficiente **m** si chiama **coefficiente angolare della retta** e rappresenta la pendenza della retta, ossia l'angolo che la retta forma col semiasse positivo delle x:

- Se **m>0** l'angolo formato dalla retta con l'asse delle x è acuto
- Se **m<0** l'angolo formato dalla retta con l'asse delle x è ottuso

Il coefficiente **q** rappresenta il **punto di intersezione della retta con l'asse delle y e** viene detto **ordinata all'origine.**





Se q=0 allora la funzione lineare ha come equazione **y=mx,** che è l'equazione di una **retta passante per l'origine O(0,0)**

Ex: y=3x

Per disegnarla occorre un altro Punto per esempio

x	y
1	3

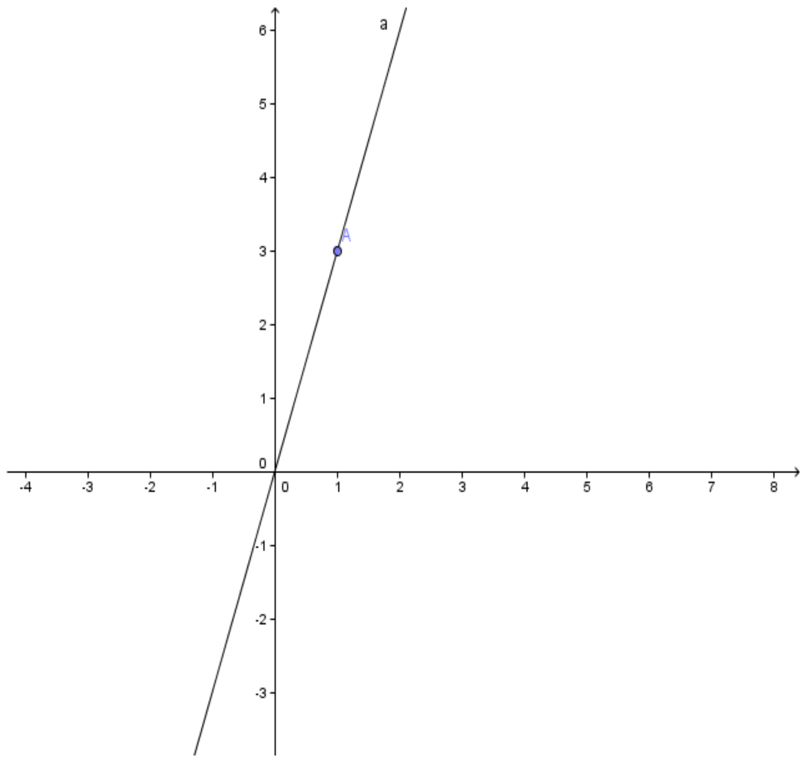


Grafico di una retta

Per rappresentare graficamente una retta occorre riportare l'equazione in forma esplicita.

- la forma **ax+by+c=0** è detta forma implicita della retta.
- La forma y=mx+q è detta forma esplicita dell'equazione di una retta

Ex: 3x+2y+4=0 forma implicita

y=4x+1 forma esplicita

Per rendere l'equazione in forma esplicita, occorre isolare la y secondo le regole delle equazioni.

Esempio:

Rendere in forma esplicita la retta 3x+2y+4=0

Si procede in questo modo:

si isola la y: 2y=-3x-4

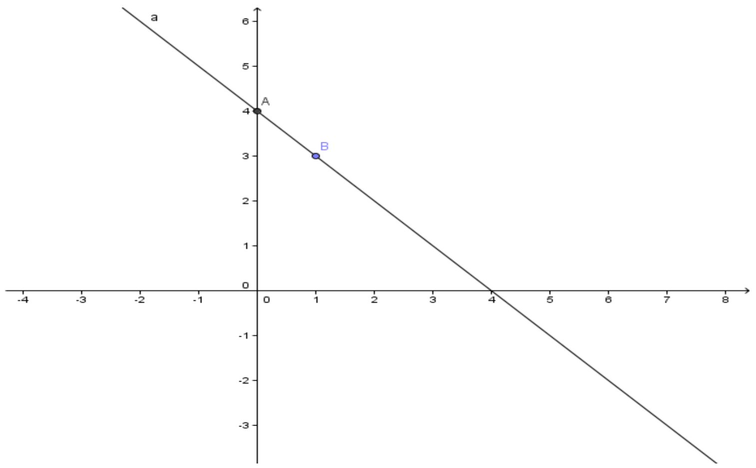
si divide per il coefficiente della y $y = \frac{-3}{2}x - 2$

$m = \frac{-3}{2}$ è il coefficiente angolare; q= -2 è l'ordinata all'origine

Per fare il grafico di una retta sono sufficienti due punti:
scritta la retta in forma esplicita un punto è dato dall'ordinata all'origine **q** che rappresenta sempre l'intersezione con l'asse delle y e per l'altro basta dare un numero qualsiasi alla x (diverso dallo 0) e calcolando si trova la y corrispondente.

Ex: y= -x + 4

x	y
1	3



Alcuni modi per determinare l'equazione della retta

Come determinare il coefficiente angolare di una retta.

Se conosco l'equazione di una retta in forma esplicita y=**m**x+q, **m** è il coefficiente angolare.

Se non conosco l'equazione della retta, ma so che passa per i punti $A(x_A;y_A)$ e $B(x_B;y_B)$, allora il coefficiente angolare m della retta AB è espresso dalla formula.

m=$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$ con $x_A \neq x_B$ (se $x_A = x_B$ allora la retta passante per i punti A e B è parallela all'asse delle y)

Ex:

Determina l'equazione della retta passante per i punti A(-2;5) B(-3;1)

Risolviamo l'esercizio in due modi:

Primo metodo:

Devo determinare l'equazione della retta y=mx+q , quindi devo calcolare m e q

Si calcola   m = $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{1-5}{-3+2} = \frac{-4}{-1} = 4$

Per calcolare q, basta sostituire l' m trovato nell'equazione della retta ed imporre il passaggio per un punto o A o B, cioè si sostituiscono le coordinate del punto al posto della x e della y nell'equazione.
Procediamo col calcolo:

y=4x+q sostituzione di m

5=4(-2)+q   passaggio per A

5=-8+q   da cui   q=13   **y=4x+13** è l'equazione della retta

Secondo metodo: A(-2;5) B(-3;1)

col sistema: i punti appartengono alla retta quindi si impone il passaggio per entrambi data l'equazione generica y=mx+q si sostituiscono le coordinate dei punti al posto della x e della y nell'equazione. Si ottiene un sistema in **m** e **q** da risolvere. Trovati m, q, si risostituiscono nell'equazione generale della retta.

$$\begin{cases} 5 = -2m + q & \text{passaggio per A} \\ 1 = -3m + q & \text{passaggio per B} \end{cases}$$

il sistema è facilmente risolvibile col metodo di somma e riduzione

$$\begin{cases} 5 = -2m + q \\ -1 = +3m - q \end{cases} \qquad \begin{cases} m = 4 \\ 5 = -8 + q \end{cases} \qquad \begin{cases} m = 4 \\ q = 13 \end{cases}$$

4= m

y=4m+13

Condizioni di parallellismo e di perpendicolarità

Due rette sono **parallele** se e solo se hanno lo stesso coefficiente angolare **m=m'**

Due rette sono **perpendicolari** se e solo se **m = -** $\frac{1}{m^1}$

Equazione del fascio proprio di rette

Equazione della retta di coefficiente angolare m passante per il punto $P(x_1;y_1)$:

$y-y_1=m(x-x_1)$

Es :

Scrivere l'equazione della retta passante per P(2;3) e parallela r: y-3x+1=0

Soluzione:

Esplicitare la retta r:

y=3x-1

poiché si richiede la retta parallela allora per la condizione di parallellismo le due rette devono avere lo **stesso** coefficiente angolare **m=m'**

ora si utilizza l'equazione del fascio di rette:
fra tutte le rette passanti per P(2;3) si vuole proprio quella con coeff. Angolare m'=3

y -3=3(x-2) da cui si ottiene , facendo i calcoli

y = 3x – 6 + 3

y = 3x – 3 che è l'equazione della retta cercata (N.B. ha lo stesso coeff. Angolare!!)

Posizione reciproca di due rette

Abbiamo detto che ogni equazione lineare ax+by+c=0 ha come grafico una retta.
Per determinare la posizione reciproca di due rette si deve risolvere un sistema fra le loro equazioni:

1. se il sistema ha una sola soluzione reale, si dice **determinato**, allora le rette sono **incidenti** e si intersecano in un punto le cui coordinate costituiscono la soluzione del sistema
2. se il sistema non ammette soluzione, si dice che è **impossibile**, allora le rette sono **parallele**
3. se il sistema ammette infinite soluzioni, si dice **indeterminato**, allora le rette sono **coincidenti**

Esempio

Stabilisci la posizione reciproca delle seguenti coppie di rette

2x+y-2=0   3x-y-3=0

$$\begin{cases} 2x + y - 2 = 0 \\ 3x - y - 3 = 0 \end{cases}$$

il sistema si risolve con somma e riduzione

5x   0 -5 = 0 da cui x=1 poi si sostituisce e si trova y=0

le rette si intersecano nel punto P(1;0)