MD6

Disequazioni, sistemi di disequazioni di 1° grado a due incognite e programmazione lineare

Disequazioni, sistemi di disequazioni di 1° grado a due incognite

Programmazione lineare

Disequazioni, sistemi di disequazioni di 1° grado a due incognite

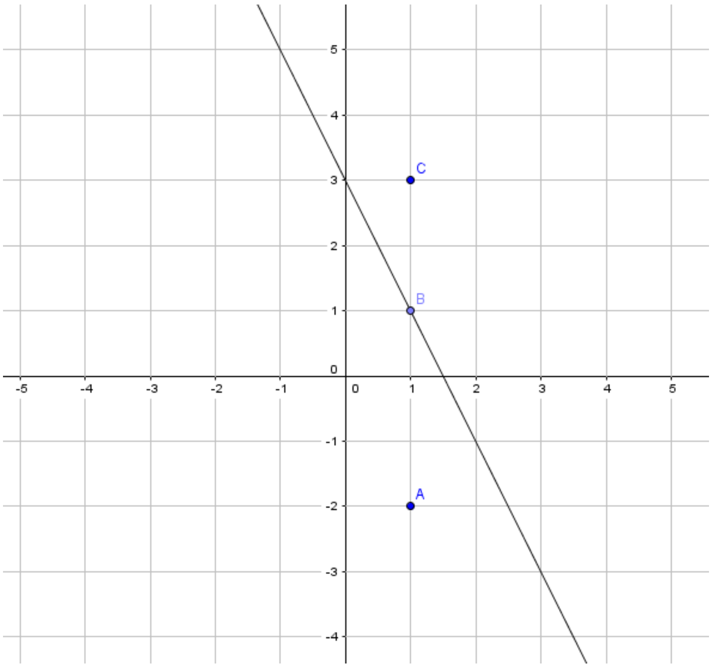
Iniziamo a risolvere una disequazione a due incognite, ad esempio:

$$2x + y \geq 3$$

Il modo migliore per rappresentare la soluzione della disequazione è quello grafico. Riscriviamo la disequazione nella forma:

$$y \geq -2x + 3$$

La retta $y = -2x + 3$ divide il piano in due parti. Da una parte avremo i punti $(x; y)$ per i quali vale $y > -2x + 3$, dall'altra quelli per cui vale $y < -2x + 3$, mentre sulla retta abbiamo i punti $(x; y)$ in modo che $y = -2x + 3$.



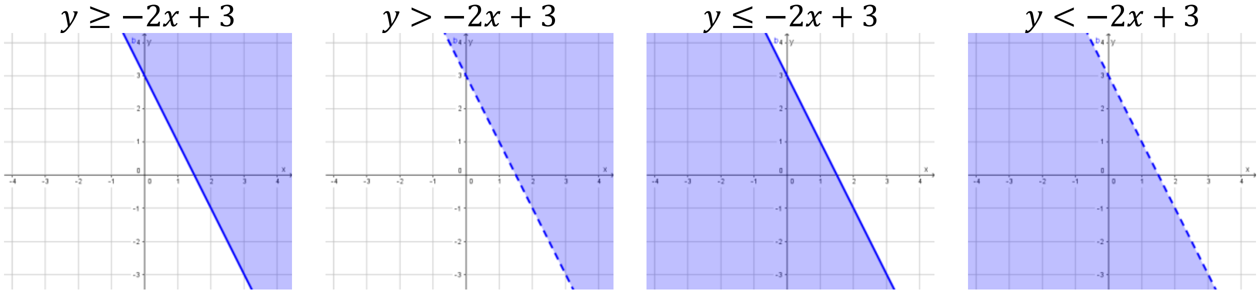
$A(1; -2) \quad \rightarrow \quad -2 < -2 \cdot 1 + 3$

$B(1; 1) \quad \rightarrow \quad 1 = -2 \cdot 1 + 3$

$C(1; 3) \quad \rightarrow \quad 3 > -2 \cdot 1 + 3$

Riassumendo:

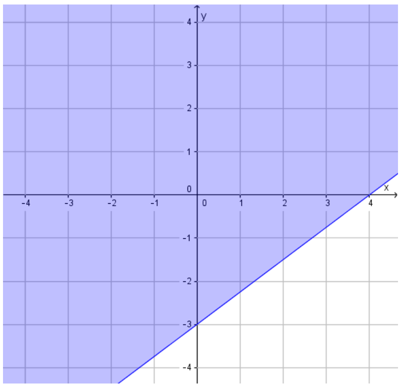
$y \geq -2x + 3$ $\qquad$ $y > -2x + 3$ $\qquad$ $y \leq -2x + 3$ $\qquad$ $y < -2x + 3$



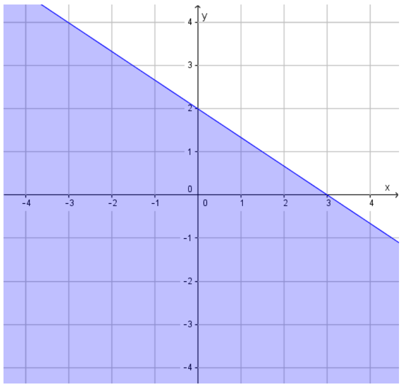
Esercizio

Rappresenta graficamente le seguenti disuguaglianze

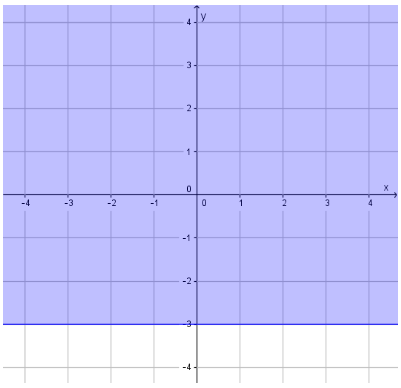
$$3x - 4y \leq 12$$
$$-4y \leq -3x + 12$$
$$y \geq \frac{3}{4}x - 3$$



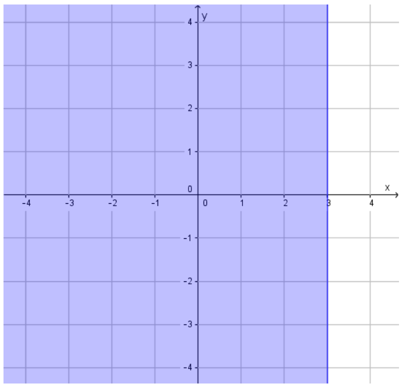
$$2x + 3y \leq 6$$
$$3y \leq -2x + 6$$
$$y \leq -\frac{2}{3}x + 2$$



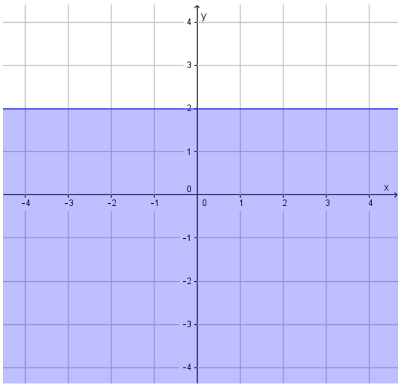
$$y \geq -3$$



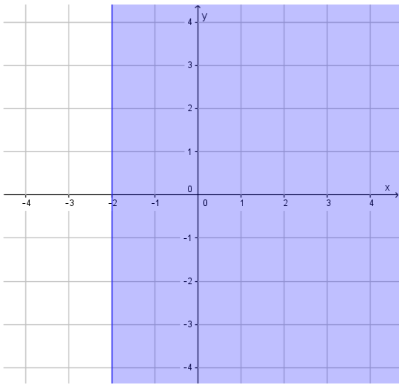
$$2x \leq 6$$
$$x \leq 3$$



$$y \leq 2$$



$$3x \geq -6$$
$$x \geq -2$$



Esercizi: Risolvi graficamente le seguenti disequazioni a due incognite.

1. $3(2-x)+2(y-3)<4(x-y)$

2. $3x-2y\leq 2(-y+x+2)$

3. $\frac{1}{2}(3x-5y)+\frac{3}{2}(4-3x)\geq\frac{5}{2}(y+2)$

4. $\frac{7}{3}\left(x+\frac{1}{4}\right)+\frac{5}{4}\left(\frac{8}{15}x-y\right)+\frac{1}{12}(17-9y)\leq 0$

5. $\frac{3}{5}\left(x-\frac{1}{2}y\right)+\frac{3}{4}\left(\frac{28}{15}x+1\right)+\frac{1}{4}\left(1-\frac{14}{5}y\right)\geq 0$

6. $2\left(\frac{1}{2}x-3\right)-\frac{1}{2}(2x+y)\leq\frac{3}{2}y$

7. $\frac{1}{2}\left(x+\frac{14}{3}\right)+\frac{1}{2}(x+3y)-\frac{1}{3}\left(\frac{3}{2}y+4\right)>0$

Sistema di disequazioni a due incognite

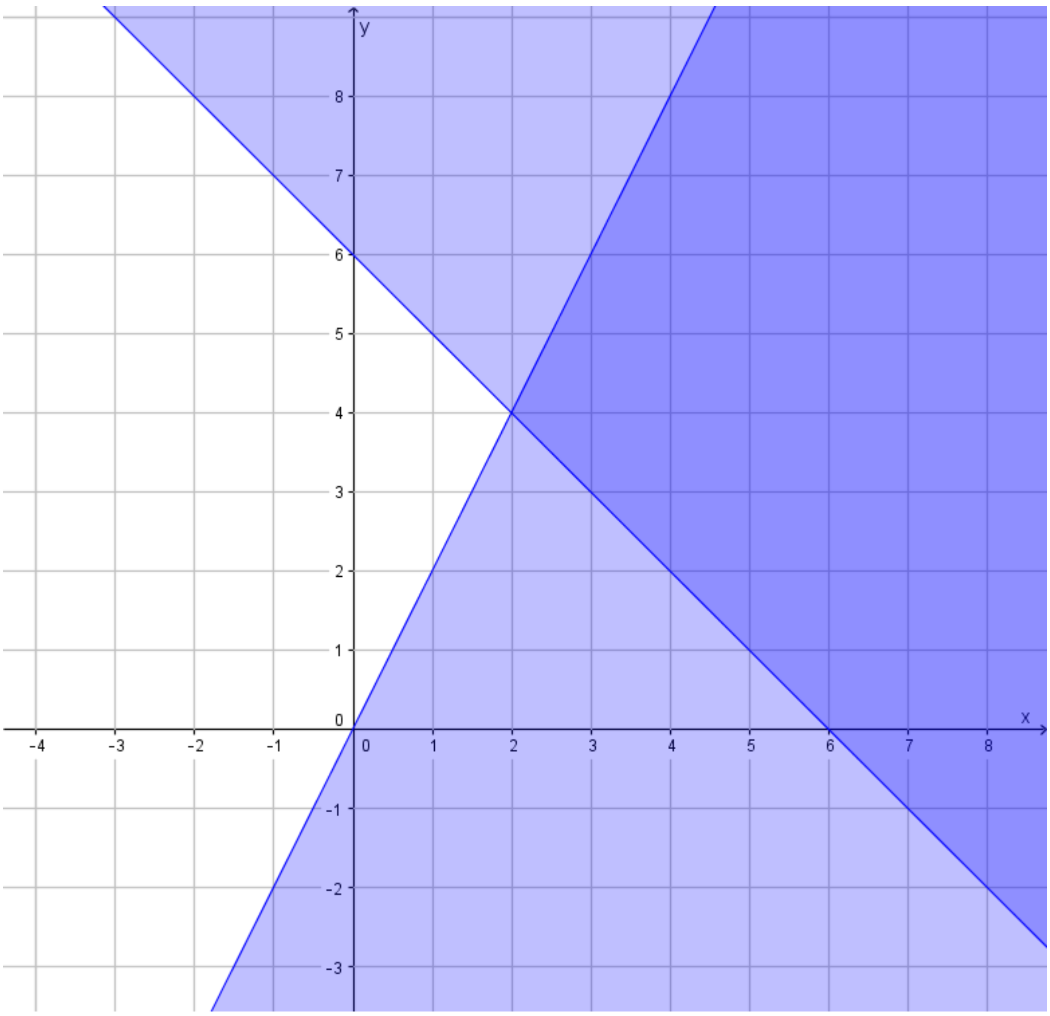
Risolviamo il sistema di disequazioni

$$\begin{cases} x + y \geq 6 \\ 2x - y \geq 0 \end{cases}$$

Lo trasformiamo prima di tutto nel sistema equivalente

$$\begin{cases} y \geq -x + 6 \\ y \leq 2x \end{cases}$$

Si rappresentano le due disequazioni nel piano cartesiano. La soluzione del sistema è data dalla regione in comune ai due semipiani soluzioni delle singole disequazioni, perché i punti $(x; y)$ che sono soluzione del sistema, devono risolvere sia la prima che la seconda disequazione contemporaneamente.



Esercizi: Risolvi graficamente i seguenti sistemi di disequazioni a due incognite, determinando le coordinate dei vertici della ragione che è soluzione della disequazione.

1. $\begin{cases} 3x + y \le 21 \\ x - 2y \le 0 \end{cases}$

2. $\begin{cases} y \ge 0 \\ 3x - y + 1 < 0 \\ 2x + y > 0 \end{cases}$

3. $\begin{cases} x > 3 \\ 2x + \frac{1}{2}y < 5 \\ y > -5 \end{cases}$

4. $\begin{cases} 2x + y \le 12 \\ x + y \le 7 \\ x + 2y \le 10 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$

5. $\begin{cases} 3x + y \le 21 \\ x + y \le 9 \\ x + 3y \le 21 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$

6. $\begin{cases} x + 2y \ge 16 \\ x + y \ge 12 \\ 2x + y \ge 14 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$

7. $\begin{cases} x + 9 \ge 5y \\ 2y + 24 > 5x \\ y \ge -\frac{4}{3}x - \frac{13}{3} \end{cases}$

8. $\begin{cases} x + y \le 11 \\ 5x + y \ge 15 \\ x + 2y \ge 12 \end{cases}$

9. $\begin{cases} x - 2y - 8 < 0 \\ x - y + 1 > 0 \\ 2x + y + 2 > 0 \\ x - 2y - 4 < 0 \end{cases}$

10. $\begin{cases} 3x + y \ge 30 \\ x + y \ge 16 \\ x + 3y \ge 24 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$

11. $\begin{cases} 5x + y \ge 20 \\ x + y \ge 12 \\ x + 3y \ge 18 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$

12. $\begin{cases} 2x + y \le 22 \\ x + y \le 13 \\ 2x + 5y \le 50 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$

13. $\begin{cases} (x + 3y)^2 - (3y + 2)^2 > x^2 - 2 + 3y(2x - 3) \\ 2x < 1 - y \end{cases}$

14. $\begin{cases} (x - 1)(x + 1) + y(1 - y) + (y - x)(y + x) < -x \\ 2(x - y) > -x \end{cases}$

15. $\begin{cases} 3\left(\frac{x}{7} - \frac{1}{4}\right) + 4\left(\frac{1}{7}x + \frac{2}{5}y\right) + \frac{2}{5}\left(y - \frac{5}{8}\right) < 0 \\ \frac{10x + 5y}{6} + \frac{35x - 21}{15} + \frac{5y - 18}{30} \ge 0 \end{cases}$

16. Una ditta produttrice di tavole da surf produce due modelli, uno standard e uno da competizione. Ogni tavola da competizione richiede 6 ore di lavoro per la fabbricazione e 1 ora di lavoro per la finitura. Ogni tavola da competizione richiede invece 8 ore di lavoro per la fabbricazione e 3 ore di lavoro per la finitura. Il reparto di fabbricazione ha a disposizione al massimo 120 ore di lavoro per settimana, mentre quello per la finitura 30 ore.
Quale combinazione di tavole (standard e competizione) può esser prodotta ogni settimana per non eccedere nelle ore di lavoro settimanali nei due reparti?

17. Una fabbrica di sci produce due tipi di sci: i carving e quelli normali. Per produrre un paio di carving occorrono 6 ore di fabbricazione e 1 ora per la finitura. Gli sci normali richiedono invece 4 ore di lavoro per la fabbricazione e 1 ora per la finitura. Giornalmente sono disponibili 108 ore di lavoro per la fabbricazione e 24 per la finitura.
Quale combinazione di sci (carving e normali) può esser prodotta senza eccedere nelle ore settimanali nei due reparti?

Programmazione lineare

Dal punto di vista economico si massimizzano i profitti, non i ricavi. Inoltre i profitti unitari variano a dipendenza della quantità. Nella programmazione lineare, i vincoli e la funzione obiettivo sono però lineari, di conseguenza siamo obbligati a mantenere i profitti unitari costanti indifferentemente dalla quantità.

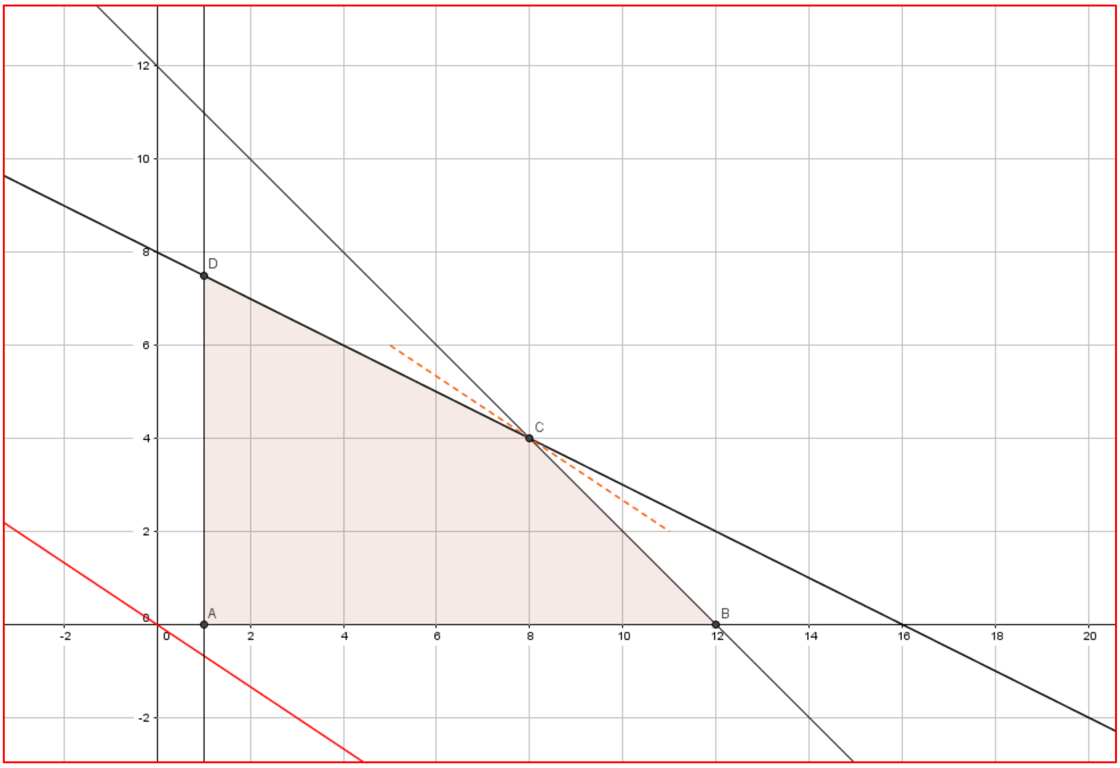
Esempio 1

Un'azienda tessile produce t-shirt e pullover. La produzione avviene con l'aiuto di due macchine (A e B). Il tempo necessario per produrre una t-shirt è di 10 minuti con la macchina A e 50 minuti con la macchina B. La produzione di un pullover richiede una lavorazione di 20 minuti con la macchina A e di 50 minuti con la macchina B.
Giornalmente la macchina A non può essere in funzione per più di 160 minuti, mentre la macchina B può essere impiegata al massimo 10 ore. Ogni giorno deve essere prodotta almeno una t-shirt.
Una t-shirt viene venduta con un profitto di 30 CHF mentre un pullover con un profitto di 45 CHF.

a) Quali devono essere le quantità prodotte giornalmente di t-shirt e pullover, così da massimizzare i profitti dell'azienda? A quanto ammonta il profitto massimo? (Trova la zona delle soluzioni, calcola i suoi vertici e determina la soluzione ottimale).

$$\begin{cases} 10x + 20y \leq 160 \\ 50x + 50y \leq 600 \\ x \geq 1 \\ y \geq 0 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} y \leq -\frac{1}{2}x + 8 \\ y \leq -x + 12 \\ x \geq 1 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

$$z_1(x,y) = 30x + 45y \qquad (z = 0) \rightarrow \quad y = -\frac{2}{3}x$$



Soluzione algebrica
$A(1;0) \rightarrow z_1(1;0) = 30 \cdot 1 + 45 \cdot 0 = 30$
$B(12;0) \rightarrow z_1(12;0) = 30 \cdot 12 + 45 \cdot 0 = 360$
$\boldsymbol{C(8;4) \rightarrow z_1(8;4) = 30 \cdot 8 + 45 \cdot 4 = 420 \ (MAX)}$
$D(1;7{,}5) \rightarrow z_1(1;7{,}5) = 30 \cdot 1 + 45 \cdot 7{,}5 = 367.50$

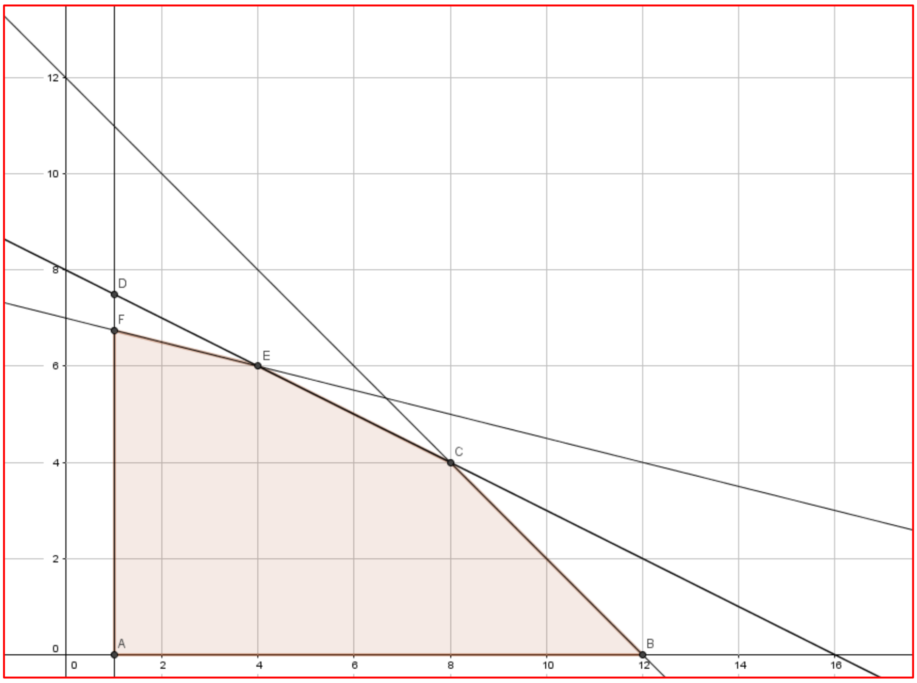
Soluzione grafica (curve di livello)
Massimo in $C(8;4)$, $z_{1,max} = z_1(8;4) = 30 \cdot 8 + 45 \cdot 4 = 420$

Con l'inizio del nuovo anno l'azienda, per poter vendere i propri prodotti, dovrà sottostare a delle nuove regolamentazioni. Per soddisfare le nuove esigenze dettate dal nuovo regolamento, dovrà investire nel controllo della merce al termine della produzione. Le t-shirt e i pullover, dopo esser stati prodotti con la macchina A e la macchina B, dovranno essere controllati.

Il tempo necessario per controllare una t-shirt è di 1 minuto, mentre quello per un pullover di 4 minuti. Giornalmente la ditta può investire fino a un massimo di 28 minuti per la parte di controllo dei propri prodotti.

b) Scrivi il nuovo sistema di disequazioni e rappresenta graficamente la nuova zona delle soluzioni.

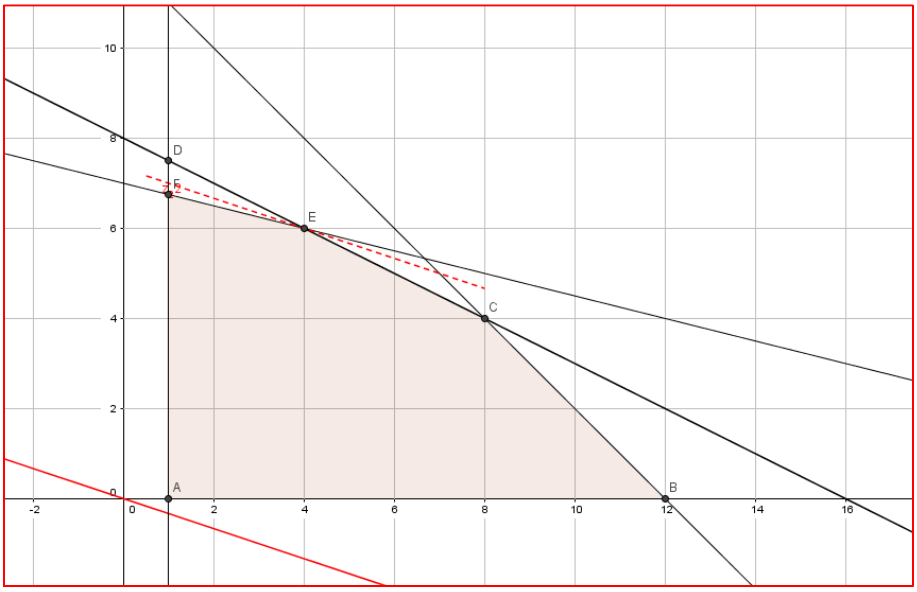
$$\begin{cases} 10x + 20y \leq 160 \\ 50x + 50y \leq 600 \\ x + 4y \leq 28 \\ x \geq 1 \\ y \geq 0 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} y \leq -\dfrac{1}{2}x + 8 \\ y \leq -x + 12 \\ y \leq -\dfrac{1}{4}x + 7 \\ x \geq 1 \\ y \geq 0 \end{cases}$$



Durante il mese di febbraio la ditta decide di scontare tutte le t-shirt, in modo tale che il profitto unitario sia ridotto del 50%.

c) Quali dovranno essere le quantità di t-shirt scontate e di pullover prodotte giornalmente, così da massimizzare i profitti dell'azienda? A quanto ammonta il profitto massimo?

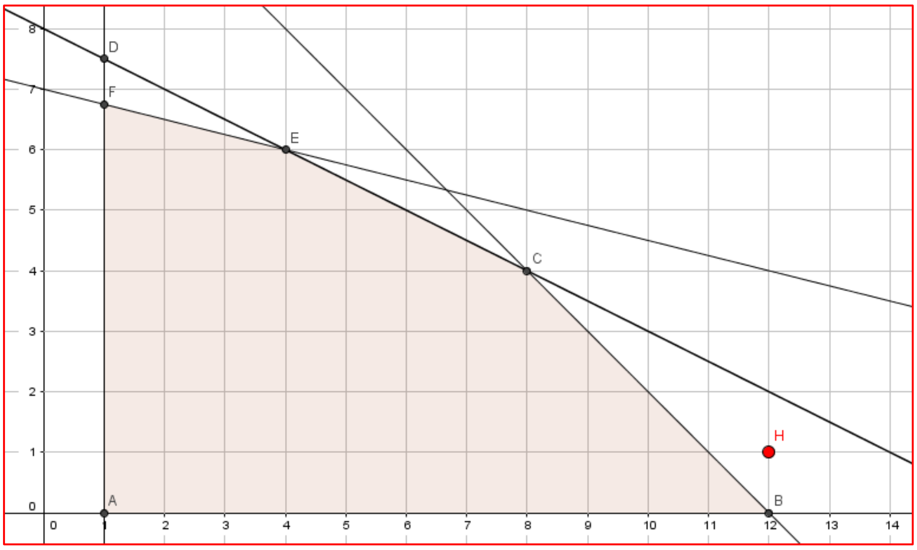
$z_2(x,y) = 15x + 45y \qquad (z=0) \rightarrow \quad y = -\frac{1}{3}x$



Massimo in $E(4;6)$, $z_{2,max} = z_2(4;6) = 15 \cdot 4 + 45 \cdot 6 = 330$

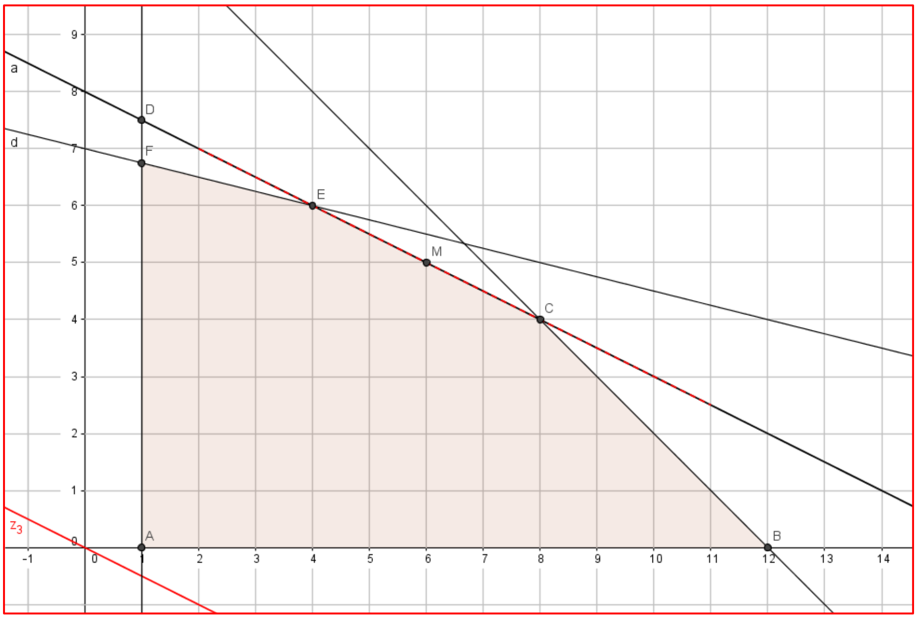
d) Un cliente vorrebbe acquistare 12 t-shirt e 1 pullover. Indica sul grafico questa combinazione. La ditta è in grado di soddisfare le richieste del cliente? Motiva la risposta.

$H(12;1)$: La ditta non è in grado di soddisfare le richieste del cliente. Con questa combinazione vengono soddisfatti tutti i vincoli tranne quello della macchina B. Per poter soddisfare le richieste del cliente, l'azienda dovrebbe potenziare il reparto della macchina B.



e) Se il profitto fosse di 15 CHF per una t-shirt e di 30 CHF per un pullover, quale combinazione massimizzerebbe i profitti? A quanto ammonta il profitto massimo?

$z(x, y) = 15x + 30y \qquad (z = 0) \rightarrow \quad y = -\frac{1}{2}x$



Soluzione = segmento CE. Il profitto massimo lo si ha con le seguenti combinazioni:

$C(8; 4) \quad \rightarrow \quad z = 15 \cdot 8 + 30 \cdot 4 = 240\ CHF$

$M(6; 5) \quad \rightarrow \quad z = 15 \cdot 6 + 30 \cdot 5 = 240\ CHF$

$E(4; 6) \quad \rightarrow \quad z = 15 \cdot 4 + 30 \cdot 6 = 240\ CHF$

Esempio 2

Decido di seguire una dieta che propone di mangiare per pranzo un piatto di pasta con salsa al basilico. Secondo la dieta, le quantità minime da assumere durante il pranzo sono le seguenti.

- Proteine: 15 g
- Grassi: 3 g
- Carboidrati: 60 g

Nella tabella seguente sono elencate le quantità di proteine, grassi e carboidrati contenute in ogni ettogrammo di pasta e di salsa al basilico, così come il prezzo.

Alimento	***Proteine (g)***	***Grassi (g)***	***Carboidrati (g)***	***Costo (CHF)***
Pasta (100g)	10	1	60	0,40
Salsa basilico (100g)	5	3	10	0,80

Quale quantità di pasta e salsa dovrò acquistare per soddisfare le quantità minime richieste dalla dieta e spendere il meno possibile?

x: ettogrammi di pasta
y: ettogrammi di salsa al basilico

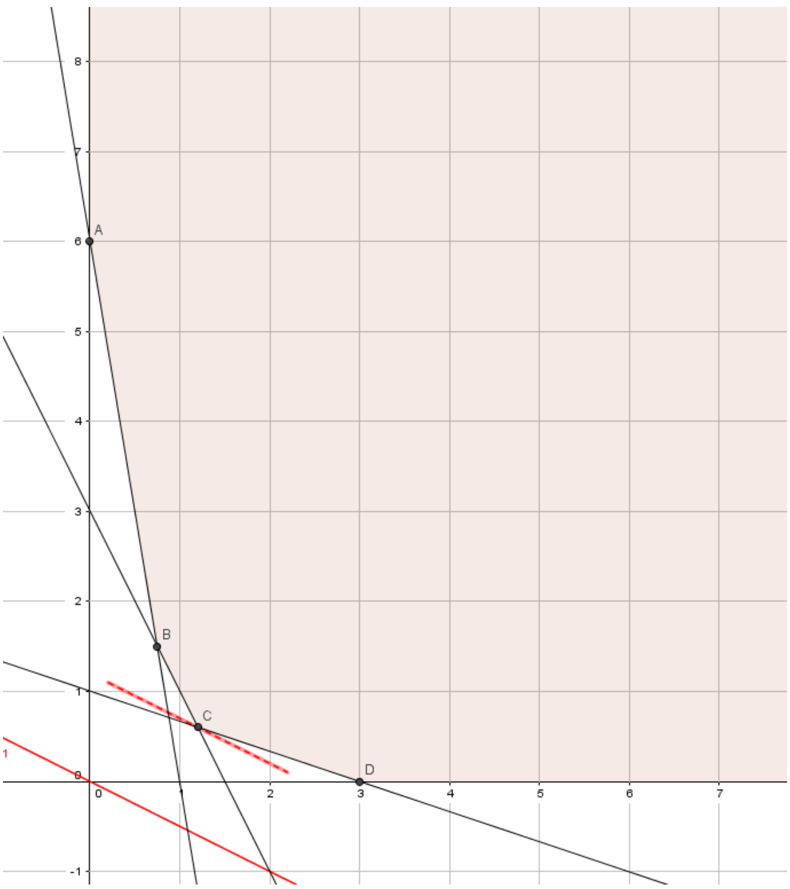
$$\begin{cases} 10x + 5y \geq 15 \\ x + 3y \geq 3 \\ 60x + 10y \geq 60 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} y \geq -2x + 3 \\ y \geq -\dfrac{1}{3}x + 1 \\ y \geq -6x + 6 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Funzione obiettivo:

$$z(x, y) = 0{,}40x + 0{,}80y$$

$$z = 0 \rightarrow \ y = -\frac{0{,}4}{0{,}8}x = -\frac{1}{2}x$$



Soluzione algebrica

$A(0; 6) \ \rightarrow \ z(A) = 4{,}8$
$B(0{,}75; 1{,}5) \ \rightarrow \ z(B) = 1{,}5$
$\boldsymbol{C(1,2; 0,6)} \ \rightarrow \ \boldsymbol{z(C) = 0,96 \ (MIN)}$
$D(3; 0) \ \rightarrow \ z(D) = 1{,}2$

Soluzione grafica (curve di livello)

Minimo in $C(1{,}2; 0{,}6)$. Con 120 g di pasta e 60 g di salsa al basilico vengono soddisfatte le quantità minime richieste dalla dieta e la spesa risulta minima: $z_{min} = z_2(1{,}2; 0{,}6) = 0{,}96 \ CHF$

Esempio 3

Un produttore di pietre da acciottolato produce due diversi tipi: grezzo (x) e fine (y). Il tipo grezzo richiede un ora di frantumazione, 3 ore di vagliatura e 9 ore di essicazione. Il tipo fine richiede 4 ore di frantumazione, 5 ore di vagliatura e 7 ore di essicazione.
Il produttore dispone di 28 ore per la frantumazione, di 45 ore per la vagliatura e di 105 ore per l'essicazione.
Si determini la combinazione produttiva che massimizza il prodotto formando equazioni e disequazioni con questi dati nei seguenti casi:

a) Il margine di profitto unitario è uguale a 30 per le pietre grezze e a 80 per quelle fine.
b) Il margine di profitto unitario è uguale a 40 per le pietre grezze e a 45 per quelle fine.

$x, y \in \mathbb{N}$

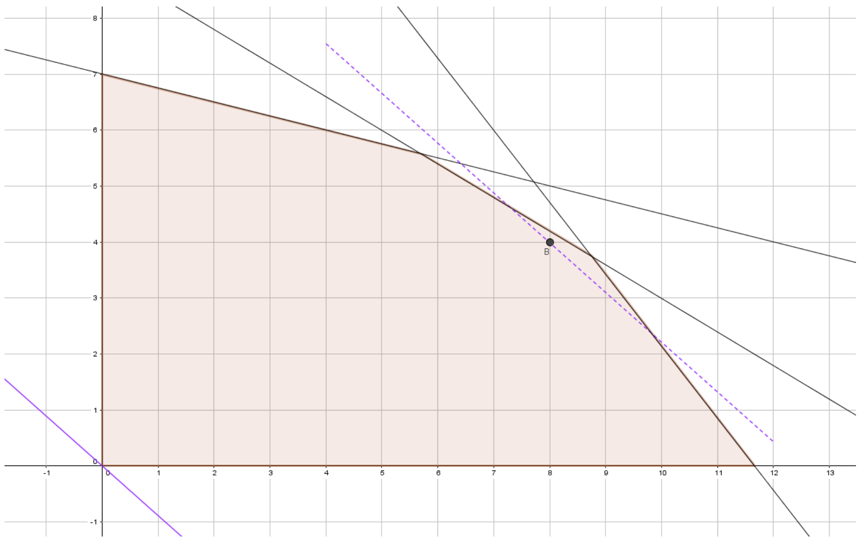
$$\begin{cases} x + 4y \leq 28 \\ 3x + 5y \leq 45 \\ 9x + 7y \leq 105 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y \leq -\frac{1}{4}x + 7 \\ y \leq -\frac{3}{5}x + 9 \\ y \leq -\frac{9}{7}x + 1 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

a) $z(x, y) = 30x + 80y$

$$z = 0 \rightarrow y = -\frac{30}{80}x = -\frac{3}{8}x$$

Massimo in $A(4; 6)$

$z_{max} = 30 \cdot 4 + 80 \cdot 6 = 600$



b) $z(x, y) = 40x + 45y$

$$z = 0 \rightarrow y = -\frac{40}{45}x = -\frac{8}{9}x$$

Massimo in $B(8; 4)$

$z_{max} = 40 \cdot 8 + 45 \cdot 4 = 500$

Esercizi di programmazione lineare

1. Determina il massimo e il minimo della funzione obiettivo $z(x, y) = 5x + 15y$, soggetta ai vincoli:
$$\begin{cases} \mathrm{x + 3y \leq 60} \\ \mathrm{x + y \geq 10} \\ \mathrm{x - y \leq \ 0} \\ \mathrm{x, y \geq 0} \end{cases}$$
[max: 300, min: 100]

2. Determina il minimo e il massimo della funzione obiettivo $z(x, y) = 10x + 5y$ soggetta ai vincoli:
$$\begin{cases} \mathrm{2x + y \geq 40} \\ \mathrm{3x + y \leq 150} \\ \mathrm{2x - y \geq \ 0} \\ \mathrm{x, y \geq 0} \end{cases}$$
[max: 600, min: 200]

3. Determina il massimo della funzione obiettivo $z(x, y) = 16000x + 10000y$ soggetta ai vincoli:
$$\begin{cases} \mathrm{x + 2y \leq 40} \\ \mathrm{3x + 2y \leq 60} \\ \mathrm{0 \leq x \leq 18} \\ \mathrm{0 \leq y} \end{cases}$$
[318000]

4. Una ditta di elettronica produce due tipi di computer: un desktop e un portatile. La produzione di un desktop costa 400 CHF e richiede 40 ore di lavoro. La produzione dei portatili costa 250 CHF e necessita 30 ore di lavoro. Se questa ditta ha a disposizione un capitale di 20'000 CHF e di 2160 ore lavoro per la produzione dei due prodotti:
Qual è il numero massimo di computer che la ditta può produrre? [72 portatili]
Se ogni desktop da un guadagno di 320 CHF e ogni portatile di 220 CHF, quanti computer di ogni tipo dovrebbe produrre l'azienda per ottenere il massimo profitto? A quanto ammonta il guadagno massimo? [30 desktop, 32 portatili, 16640 CHF]

5. Calamità naturali o guerre richiedono di organizzare un ponte aereo per evacuare la popolazione di una zona. In generale, le compagnie aeree che mettono a disposizione i loro veicoli sono più di una, con aerei di capacità e costi diversi e si deve scegliere la soluzione più economica; ecco un esempio da esaminare.
Si devono trasportare 800 persone e 100 tonnellate di bagagli. Una compagnia mette a disposizione 6 aerei di tipo A e ogni aereo può trasportare 100 passeggeri e 20 tonnellate di

bagagli al prezzo di 200'000 CHF. Un'altra compagnia offre 8 aerei di tipo B e ogni aereo può trasportare 200 passeggeri e 10 tonnellate di bagagli al prezzo di 600'000 CHF.
Quanti aerei di tipo A e quanti aerei di tipo B conviene noleggiare per trasportare tutte le merci e tutte le persone al costo minimo? [6 aerei A, 1 aereo B]

6. Una cooperativa agricola produce, con il latte invenduto, mozzarelle e gelati.
   Per produrre 1 Kg di mozzarella sono necessari 1,5 Kg di latte, 1 minuto di lavorazione manuale e 3 minuti di lavorazione automatizzata.
   Per produrre 1 Kg di gelato sono necessari 2 Kg di latte, 3 minuti di lavorazione manuale e 2 minuti di lavorazione automatizzata.
   Per la produzione dei due prodotti sono disponibili al massimo: 2'000 Kg di late, 40 ore di manodopera, 60 ore di lavorazione meccanizzata.
   La cooperativa vende la mozzarella a 8 CHF al Kg ed il gelato a 12 CHF al Kg. Quale sarà il ricavo massimo? [11'520 CHF]

7. Un autotrasportatore lavora per un mobilificio che produce oggetti in metallo, legno e cristallo; egli trasporta le merci richieste dalla clientela direttamente dal magazzino di stoccaggio al domicilio dell'acquirente.
   I mobili sono tutti smontati e i pezzi sono confezionati in due tipi di pacchi:
   Un tipo di pacco contiene merce delicata (ante di cristallo); occupa un volume di 2 m^3 e pesa 115 Kg.
   Un secondo tipo di pacco contiene le parti in legno; occupa un volume di 3 m^3 e pesa 60 Kg.
   Il furgone ha una capacità di 75 m^3 e può trasportare fino a 3,3 tonnellate. Inoltre l'autotrasportatore non effettua il trasporto per meno di 10 consegne. Infine ogni carico contiene almeno due pacchi di parti in cristallo.

8. Per produrre due oggetti, A e B, che richiedono rispettivamente 30 minuti e 40 minuti di rifinitura con una certa macchina, una ditta può utilizzare tale macchina 8 ore al giorno. Il numero di oggetti del tipo B non deve essere superiore a 9. Il profitto derivante dalla vendita dei due oggetti è 40 CHF per il primo tipo e di 55 CHF per il secondo. Determina il numero di oggetti da produrre giornalmente per avere il profitto massimo.
   [655 CHF]

9. Un'azienda produce due diversi tipi, A e B, dello stesso prodotto; B si distingue da A solo per la cura con cui è rifinito. Entrambi i prodotti richiedono l'impiego di due macchine M1 e M2 che sono disponibili rispettivamente 12 ore e 24 ore al giorno. Inoltre il prodotto B viene lavorato anche manualmente e sono disponibili 2 ore di lavoro manuale al giorno.
   Ogni unità A richiede 2 ore di lavoro con la macchina M1 e 3 ore con la macchina M2; ogni unità B richiede 2 ore di lavoro con la macchina M1, 5 ore con la macchina M2 e 30 minuti di lavoro manuale.
   Sapendo che l'azienda consegue un utile di 4 CHF per ogni unità A e di 5 CHF per ogni unità B venduta, determina la combinazione produttiva giornaliera che consente di realizzare il massimo utile. A quanto ammonta questo massimo?
   [25 CHF]

10. Un'acciaieria specializzata produce due tipi di acciaio (A1 e A2). Il tipo 1 richiede 2 ore di fusione, 4 ore di laminazione e 10 ore di taglio. Il tipo 2 richiede 5 ore di fusione, 1 ora di laminazione e 5 ore di taglio.
Si dispone di 40 ore per la fusione, di 20 per la laminazione, e di 60 per il taglio. Il margine di profitto per il tipo 1 è 24; per il tipo 2 è 8.
Si formino con questi dati le equazioni e disequazioni necessarie a determinare la combinazione produttiva che massimizza il profitto. A quanto ammonta il profitto massimo?
[4 A1 e 4 A2; max: 128]

11. Un salutista desidera assumere giornalmente almeno 36 unità di vitamina A, 28 unità di vitamina C e 32 unità di vitamina D. Il prodotto 1 costa 3 CHF e fornisce 2 unità di vitamina A, 2 unità di vitamina C e 8 unità di vitamina D. Il prodotto 2 costa 4 CHF e fornisce 3 unità di vitamina A, 2 unità di vitamina C e 2 unità di vitamina D.
In termini di equazioni e disequazioni, qual è la combinazione di minor costo che assicura il fabbisogno giornaliero?
[6 prodotto 1 e 8 prodotto 2; min: 50]

12. Una ditta è confrontata con l'ottimizzazione della vendita di alcuni particolari articoli x e y, che si può riassumere nella seguente funzione obiettivo.

$$F(x,y) = 320y + 128x$$

Si devono però rispettare i seguenti vincoli:

$$\begin{cases} 2x + 4y - 28 \leq 0 \\ 40 - 5x - 5y \geq 0 \\ 36 - 6x - 2y \geq 0 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

a) Rappresenta graficamente il sistema di disequazioni e determina le coordinate dei punti nei quali la funzione F è massima e calcola il suo valore. [$(0;7)$, max: 2240]

b) Se le condizioni di smercio imponessero di vendere almeno un articolo di ogni qualità (ovvero $x \geq 1$ e $y \geq 1$), il punto nel quale F è massima cambierebbe? Se si calcola il nuovo valore di F. [$(2;6)$, max: 2176]

13. Una società è confrontata con il problema di ottimizzare i costi di gestione di due suoi uffici, costi che sono riassumibili dalla funzione $z(x, y) = 7x + 14y + 200$
Ciò deve avvenire rispettando i seguenti vincoli

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 7 - x \geq 0 \\ 6 - y \geq 0 \\ 11 - x - y \geq 0 \\ x + y - 8 \geq 0 \end{cases}$$

Calcola qual è il valore minimo e qual è il valore massimo che può assumere la funzione z.

[min: $(7; 1)$, 263]
[max: $(5; 6)$, 319]

14. Il signor Botta ha firmato un contratto con una compagnia produttrice di cellulari.
Partendo da un kit di montaggio, egli assembla e inscatola, pronti alla vendita, due modelli, il "caillou" e il "coquille".
Per come si è organizzato a casa sua, Botta dovrà sottostare a i vincoli seguenti (x è il numero di "caillou" e y è il numero di "coquille" assemblati giornalmente).

$$\begin{cases} 45x + 30y \leq 930 \\ 17x + 68y \geq 1224 \\ -26x + 13y \leq 117 \end{cases}$$

L'azienda ha inoltre imposto un numero massimo complessivo di 24 pezzi al giorno e paga Botta 5 CHF per ogni "caillou" e 7,50 CHF per ogni "coquille" assemblato.
Si consiglia di usare l'unità di 1 quadretto per poter rappresentare le situazioni sullo stesso grafico.

a) Quanti cellulari di ciascun tipo deve assemblare giornalmente Botta per ottenere un ricavo massimo dal suo lavoro? A quanto ammonta tale ricavo? [max: $(8; 16)$, 160]

b) Introducendo una piccola miglioria nel suo ambiente di lavoro, Botta riesce a cambiare il secondo vincolo il $17x + 68y \leq 1428$.
Come cambiano le risposte alla domanda a)? [max: $(5; 19)$, $167{,}50$]

15. Una ditta produce regolatori di potenza per macchinine telecomandate da competizione. Vengono costruite due versioni differenti di questi apparecchi:

- Regolatori di tipo 1 (x), che vengono venduti a 40.- CHF al pezzo;
- Regolatori di tipo 2 (y), che vengono venduti a 60.- CHF al pezzo;

Un tecnico della ditta ha analizzato le condizioni di lavoro alle quali deve sottostare la produzione dei due tipi di regolatori ed ha individuato i vincoli indicati nel seguente sistema:

$$\begin{cases} 3y + 5x \geq 39 \\ 3y + x \geq 27 \\ x - 21 \leq 0 \\ x + y - 31 \leq 0 \\ y - 17 \leq 0 \\ y - \dfrac{2}{5}x - 15 \leq 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

a) Rappresentare graficamente l'insieme delle soluzioni del sistema.
b) Determinare graficamente quanti regolatori di ciascun tipo bisogna produrre affinché il profitto sia massimo e come calcolarne algebricamente il valore. [max: $(14; 17)$, 1580]
c) Determinare graficamente quanti regolatori di ciascun tipo bisogna produrre affinché il profitto sia minimo e calcolarne algebricamente il valore. [min: $(3; 8)$, 600]

16. Una fabbrica produce due tipi di biciclette: rampichini e bici da corsa.
La fabbricazione è suddivisa in tre settori: in un settore si procede alla saldatura dei tubolari, in un altro settore si esegue il montaggio del cambio e nel terzo settore si apportano i lavori di rifinitura.

Nella tabella seguente sono riassunti i dati relativi alle diverse prosuzioni:

Modello	Tempi di lavoro per ogni bicicletta		
	Saldatura tubolari	Montaggio cambio	Lavori di rifinitura
Rampichino	40 min	30 min	105 min
Bici da corsa	60 min	70 min	90 min

Per problemi di organizzazione interna si hanno dei tempi complessivi di lavorazione che non potranno superare per i diversi settori i seguenti parametri giornalieri:

- Saldatura tubolari: 960 minuti;
- Montaggio cambio: 980 minuti;
- Lavori di rifinitura: 2250 minuti.

Il guadagno per la vendita dei rampichini è di 90 CHF per unità, mentre per le bici da corsa è di 100 CHF per unità.

Quanti rampichini e quanti bici da corsa devono essere prodotte in modo da ottenere l'utile massimo. Qual è questo utile massimo? [max: $(18; 4)$, 2020]