T

CAPITOLO

21 FUNZIONI DI DUE VARIABILI

1 Disequazioni in due incognite

Listen to it

A solution of a **linear inequality in two variables** is an ordered pair of values that satisfies the given inequality. The set of solutions of the inequality can be represented as a region on the Cartesian plane.

Disequazioni lineari

▶ Esercizi a p. 1135

Diciamo che una disequazione è *lineare* se è di primo grado.

Ogni disequazione lineare in due incognite può essere ricondotta alla forma

$ax + by + c > 0$, con a, b non entrambi nulli,

o alle altre analoghe con i diversi segni di disuguaglianza.

Le soluzioni di una disequazione in due incognite sono tutte le coppie ordinate di numeri reali che verificano la disuguaglianza. Poiché a ogni coppia corrisponde un punto del piano cartesiano, possiamo studiare queste disequazioni rappresentando l'insieme delle loro soluzioni nel piano cartesiano.

Per una disequazione lineare in due incognite distinguiamo i seguenti casi.

1. $\boldsymbol{a = 0, b \neq 0}$

Nel caso particolare in cui il coefficiente della x è 0 e quello della y è diverso da 0, alla disequazione è associata la retta parallela all'asse x di equazione

$$by + c = 0 \rightarrow y = -\frac{c}{b} \rightarrow y = q,$$

dove abbiamo posto $-\frac{c}{b} = q$. La disequazione può essere riscritta in una delle seguenti forme:

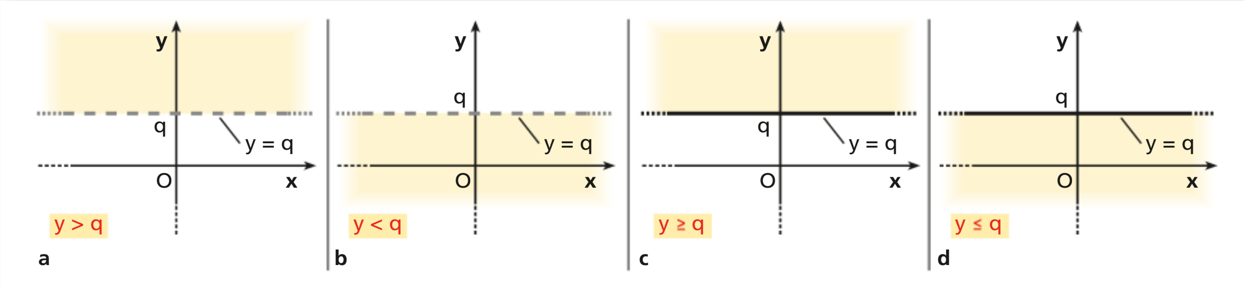
$y > q;\qquad y < q;\qquad y \geq q;\qquad y \leq q.$

La retta divide il piano in due semipiani.

La disequazione $y > q$ individua il semipiano i cui punti hanno ordinata maggiore di q (figura **a**), mentre la disequazione $y < q$ individua il semipiano i cui punti hanno ordinata minore di q (figura **b**).

In entrambi i casi i punti della retta non sono soluzioni della disequazione, quindi tratteggiamo la retta.

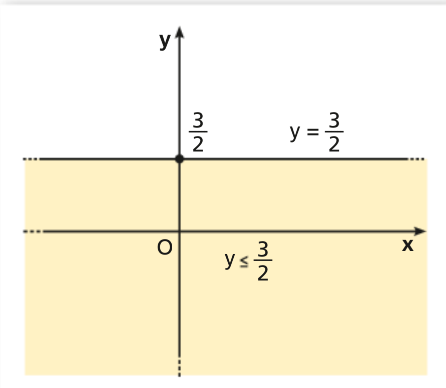
Considerazioni analoghe valgono per $y \geq q$ (figura **c**) e $y \leq q$ (figura **d**), ma in questi casi i punti della retta sono soluzioni della disequazione, quindi utilizziamo una linea continua.



ESEMPIO

$$2y - 3 \leq 0 \rightarrow y \leq \frac{3}{2}$$

Le soluzioni della disequazione sono rappresentate da tutti i punti del semipiano colorato, inclusa la retta origine di equazione $y = \frac{3}{2}$.

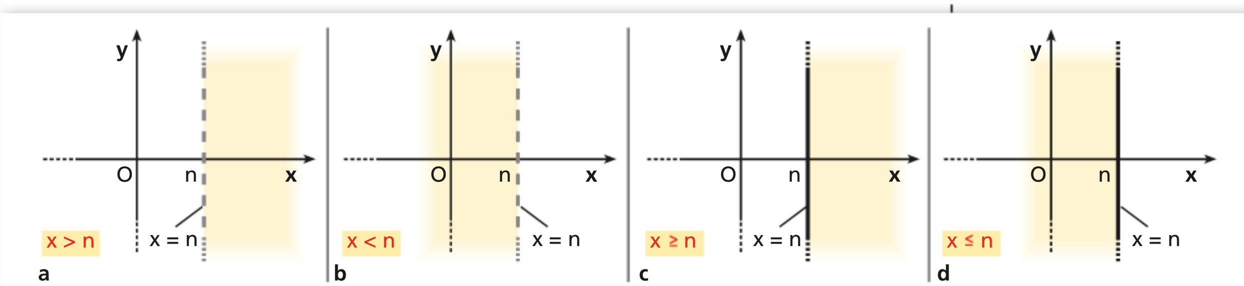


2. $a \neq 0, b = 0$

Alla disequazione è associata la retta parallela all'asse y di equazione:

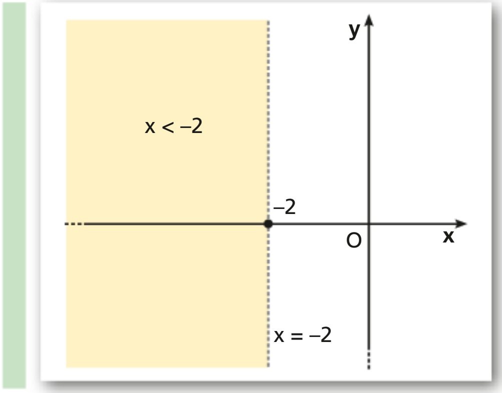
$$ax + c = 0 \rightarrow x = -\frac{c}{a} \rightarrow x = n, \qquad \text{con } n = -\frac{c}{a}.$$

Le disequazioni $x > n$ e $x < n$ (figure **a** e **b**) individuano rispettivamente il semipiano i cui punti hanno ascissa maggiore di n e il semipiano dei punti che hanno ascissa minore di n.
Le disequazioni con i segni $\geq$ e $\leq$ individuano gli stessi semipiani, ma compresi i punti della retta origine (figure **c** e **d**).



ESEMPIO

$$-4x - 8 > 0 \rightarrow x < -2$$



Nella figura è rappresentato l'insieme dei punti che hanno ascissa $x < -2$.

3. $\boldsymbol{a \neq 0, b \neq 0}$

Alla disequazione è associata la retta, non parallela agli assi, di equazione:

$$ax + by + c = 0 \rightarrow y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b} \rightarrow y = mx + q,$$

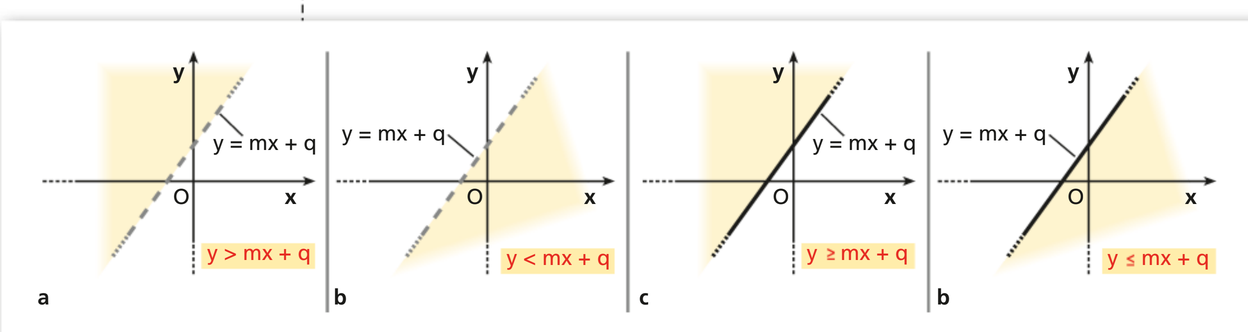
con $m = -\frac{a}{b}$ e $q = -\frac{c}{b}$.

Considerati i semipiani in cui la retta divide il piano, le soluzioni delle disequazioni

$$y > mx + q, \qquad y < mx + q, \qquad y \geq mx + q, \qquad y \leq mx + q$$

sono rappresentate dai punti del semipiano in cui l'ordinata dei punti di ascissa x è rispettivamente:

- maggiore di $mx + q$,
- maggiore o uguale a $mx + q$,
- minore di $mx + q$,
- minore o uguale a $mx + q$.



Se si vuole evitare di esplicitare la disequazione rispetto alla y, per determinare quale dei due semipiani rappresenta l'insieme delle soluzioni, basta disegnare la retta $ax + by + c = 0$ e sostituire nella disequazione le coordinate di un punto che non si trovi su tale retta. Se le coordinate del punto soddisfano la disequazione, il semipiano a cui appartiene il punto è il semipiano cercato. In caso contrario, il semipiano da considerare è quello opposto.
Il punto considerato viene detto **punto di prova**.

Quando la retta non passa per l'origine, ossia se $q \neq 0$, è conveniente utilizzare come punto di prova l'origine O, perché semplifica i calcoli.

ESEMPIO

Rappresentiamo nel piano cartesiano l'insieme delle soluzioni della disequazione:

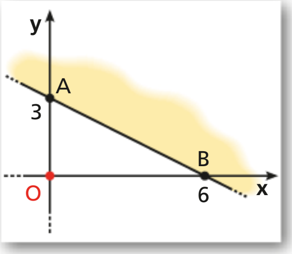
$$x + 2y - 6 \geq 0.$$

Disegniamo la retta di equazione $x + 2y - 6 = 0$.

Scegliamo a caso un punto in uno dei due semipiani individuati dalla retta, per esempio $O(0; 0)$. Le sue coordinate non soddisfano la disequazione perché:

$$0 + 2 \cdot 0 - 6 = -6 < 0.$$

Il semipiano che rappresenta l'insieme delle soluzioni della disequazione è quindi quello che *non* contiene O, cioè quello che abbiamo colorato.



► Risolvi la disequazione $2x + 4 < y + 1$.

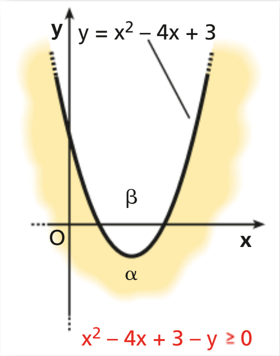
Disequazioni non lineari

► Esercizi a p. 1136

Anche per le disequazioni non lineari in due incognite si procede come con quelle lineari. Esaminiamo alcuni esempi.

ESEMPIO

Risolviamo la disequazione $x^2 - 4x + 3 - y \geq 0$.



Esplicitando rispetto a y, otteniamo:

$$y \leq x^2 - 4x + 3.$$

Rappresentiamo la parabola di equazione $y = x^2 - 4x + 3$, che divide il piano in due regioni α e β (figura a fianco). Per i punti di α l'ordinata è minore di quella dei punti della parabola con uguale ascissa, quindi:

$$y < x^2 - 4x + 3.$$

Le soluzioni della disequazione sono quindi rappresentate dai punti della parabola e da quelli della regione di piano α.

Possiamo anche applicare il metodo del punto di prova. Consideriamo $O(0; 0)$. Abbiamo:

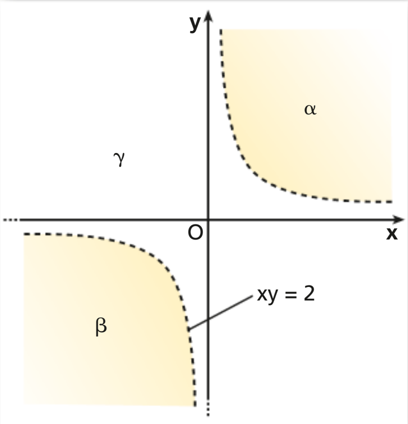
$$0^2 - 4 \cdot 0 + 3 - 0 > 0.$$

La disequazione è verificata per O che è punto della regione α.

► Risolvi la disequazione $y + x^2 \geq 4x + 5$.

ESEMPIO

Risolviamo la disequazione $xy > 2$. Rappresentiamo la curva di equazione $xy = 2$. È un'iperbole equilatera che divide il piano in tre regioni: α, β e γ (figura a fianco). Nella disequazione data dividiamo per x e otteniamo:



- se $x > 0$ $y > \dfrac{2}{x}$, le cui soluzioni sono rappresentate dai punti di α;
- se $x < 0$ $y < \dfrac{2}{x}$, con soluzioni rappresentate dai punti di β.

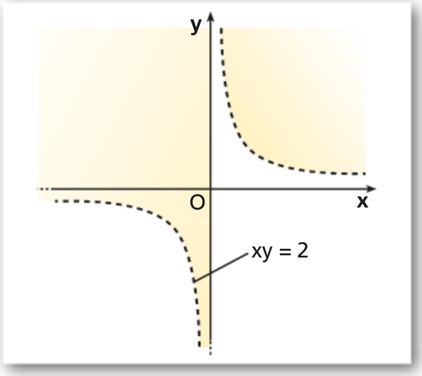
Quindi, le soluzioni della disequazione data sono rappresentate da $\alpha \cup \beta$.

► Risolvi la disequazione dell'esempio precedente con il metodo del punto di prova.

In generale, si può dimostrare che per una disequazione analoga a quella dell'esempio le soluzioni sono sempre rappresentate da $\alpha \cup \beta$ oppure da γ.
Quindi, anche in questo caso, si può utilizzare il metodo del punto di prova.
Analizziamo ora la differenza delle soluzioni dell'esempio visto con il seguente.

ESEMPIO
Risolviamo la disequazione $y > \frac{2}{x}$.

Analogamente al caso precedente, rappresentiamo l'iperbole di equazione $xy = 2$. Questa volta la soluzione della disequazione è rappresentata dai punti che hanno ordinata maggiore di quella dei punti dell'iperbole con la stessa ascissa, ossia quelli delle regioni colorate nella figura.



► Risolvi la disequazione $\frac{1}{3}y < \frac{1}{x-1}$.

Sistemi di disequazioni

► Esercizi a p. 1137

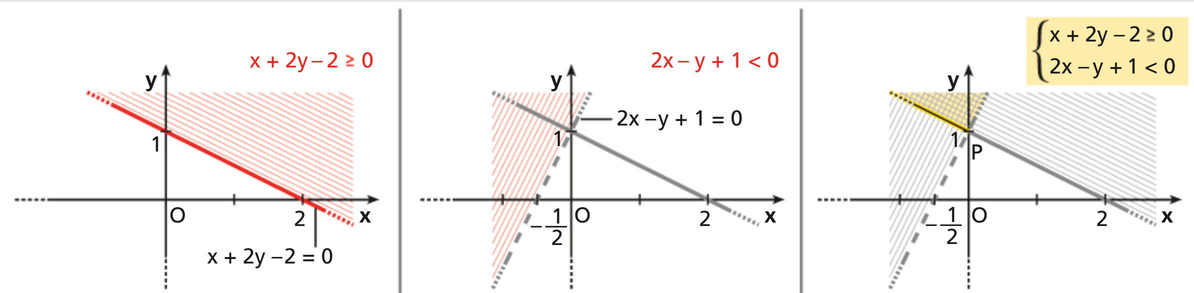
Per rappresentare nel piano cartesiano l'insieme delle soluzioni di un sistema di due o più disequazioni in due incognite, dobbiamo determinare l'**intersezione** fra le parti di piano che rappresentano le soluzioni delle due o più disequazioni di cui è composto il sistema.

ESEMPIO
Rappresentiamo l'insieme delle soluzioni del sistema di due disequazioni in due incognite:

$$\begin{cases} x + 2y - 2 \geq 0 \\ 2x - y + 1 < 0 \end{cases}$$

Applichiamo il metodo del punto di prova. Disegniamo la retta $x + 2y - 2 = 0$ associata alla prima disequazione. Sostituiamo nella disequazione le coordinate di $O(0; 0)$, che non appartiene alla retta. Essendo $0 + 2 \cdot 0 - 2 = -2 < 0$, il semipiano che rappresenta le soluzioni della disequazione è opposto a quello contenente l'origine (figura **a**). Con considerazioni analoghe, determiniamo il semipiano delle soluzioni della seconda disequazione (figura **b**). La parte di piano che rappresenta le soluzioni del sistema si ottiene dall'intersezione dei due semipiani, e in questo caso è un angolo privato della semiretta appartenente alla retta $2x - y + 1 = 0$ e del punto $P(0; 1)$ comune alle due rette (figura **c**).

► Risolvi il sistema $\begin{cases} x + y < 0 \\ x + y + 1 > 0 \end{cases}$.



a. Le soluzioni della disequazione $x + 2y - 2 \geq 0$.

b. Le soluzioni della disequazione $2x - y + 1 < 0$.

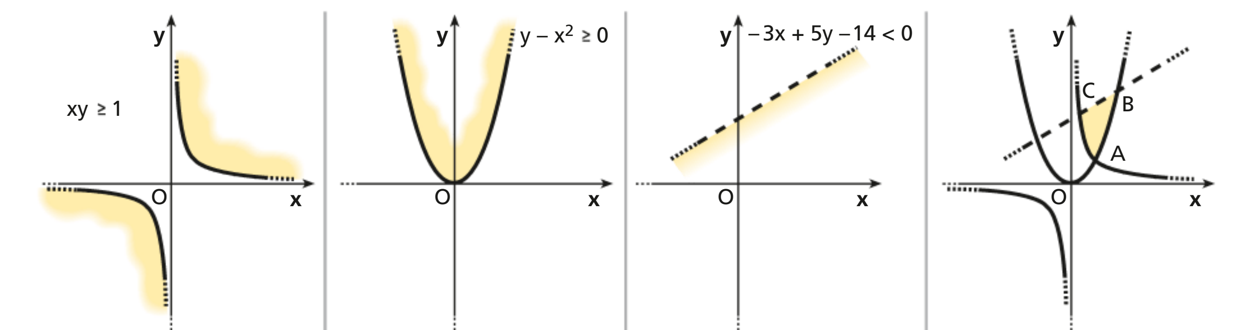
c. Le soluzioni del sistema $\begin{cases} x + 2y - 2 \geq 0 \\ 2x - y + 1 < 0 \end{cases}$

ESEMPIO

Risolviamo il sistema $\begin{cases} xy \geq 1 \\ y - x^2 \geq 0 \\ -3x + 5y - 14 < 0 \end{cases}$.

Rappresentiamo le curve relative alle singole equazioni dedotte dalle disequazioni del sistema. Dalla prima otteniamo un'iperbole equilatera, dalla seconda una parabola e dalla terza una retta. Con il solito metodo rappresentiamo l'insieme delle soluzioni di ciascuna disequazione (figure **a**, **b**, **c**).
Sovrapponendo le tre soluzioni parziali, determiniamo una parte di piano delimitata dalla figura mistilinea *ABC* (figura **d**), i cui punti hanno coordinate che soddisfano tutte le disequazioni e quindi rappresentano le soluzioni del sistema.

▶ Risolvi il sistema $\begin{cases} y + 2 > 0 \\ y - x^2 + 2x \leq 0 \end{cases}$.



a. Le soluzioni di $xy \geq 1$.

b. Le soluzioni di $y - x^2 \geq 0$.

c. Le soluzioni di $-3x + 5y - 14 < 0$.

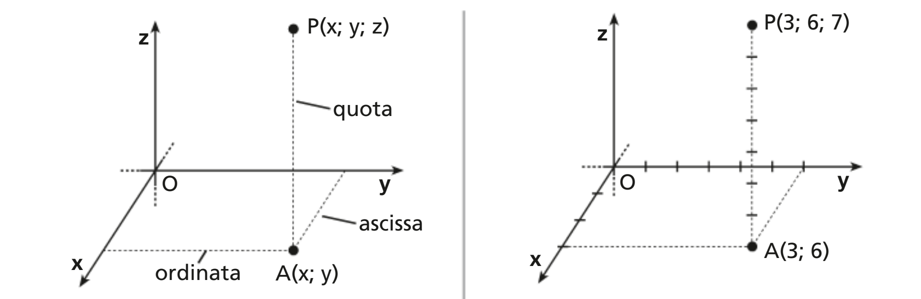
d. Le soluzioni del sistema.

2 Coordinate nello spazio

▶ Esercizi a p. 1140

Coordinate cartesiane nello spazio

Per rappresentare i punti dello spazio mediante coordinate cartesiane, utilizziamo tre rette a due a due perpendicolari, gli assi x, y e z, che si intersecano in un punto O, detto **origine**.
Orientati gli assi x, y e z come nella figura **a**, nel sistema $Oxyz$ un punto P è individuato da una terna ordinata di numeri reali e si indica con $P(x; y; z)$.
I numeri x, y, z vengono detti rispettivamente **ascissa**, **ordinata** e **quota**. La coppia $(x; y)$ individua il punto A, proiezione di P nel piano Oxy.



a

b. Punto P di ascissa 3, ordinata 6 e quota 7.

Listen to it

In a **three-dimensional Cartesian coordinate system**, any point is specified by three coordinates:
- the *abscissa* (measured along the x-axis),
- the *ordinate* (measured along the y-axis),
- the *applicate* (measured along the z-axis).

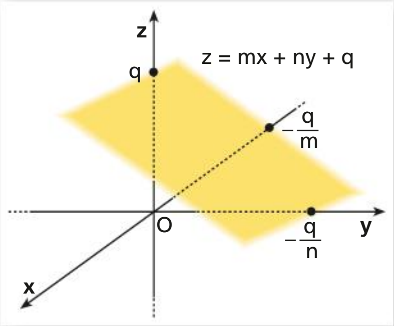
Piani nello spazio

Nel piano un'equazione del tipo $y = mx + q$ (forma esplicita) o $ax + by + c = 0$ (forma implicita) rappresenta una retta.
In modo analogo, nello spazio l'equazione di un piano è un'equazione lineare nelle tre incognite x, y, z:

$$ax + by + cz + d = 0 \quad \text{forma implicita,}$$

con a, b, c non tutti nulli.
Se $c \neq 0$, possiamo scrivere:

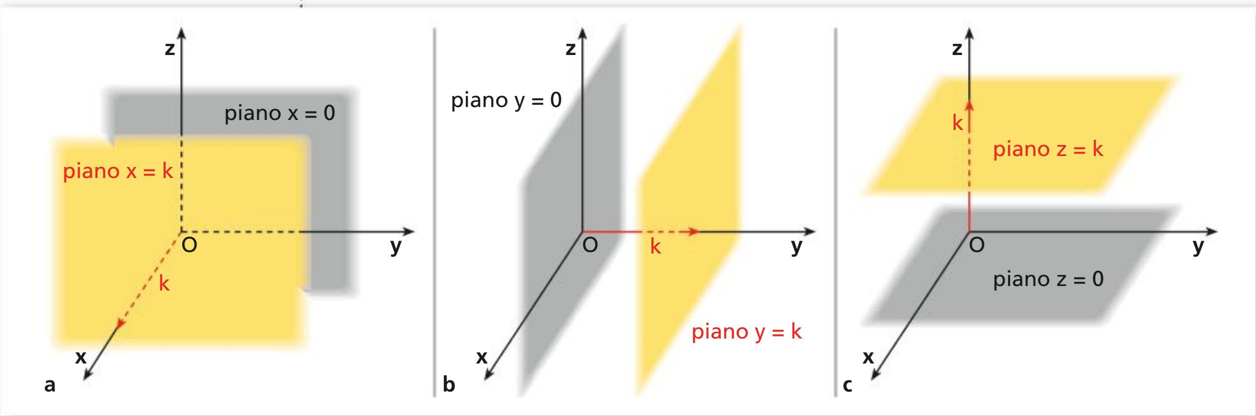
$$z = mx + ny + q \quad \text{forma esplicita.}$$



Come casi particolari abbiamo:

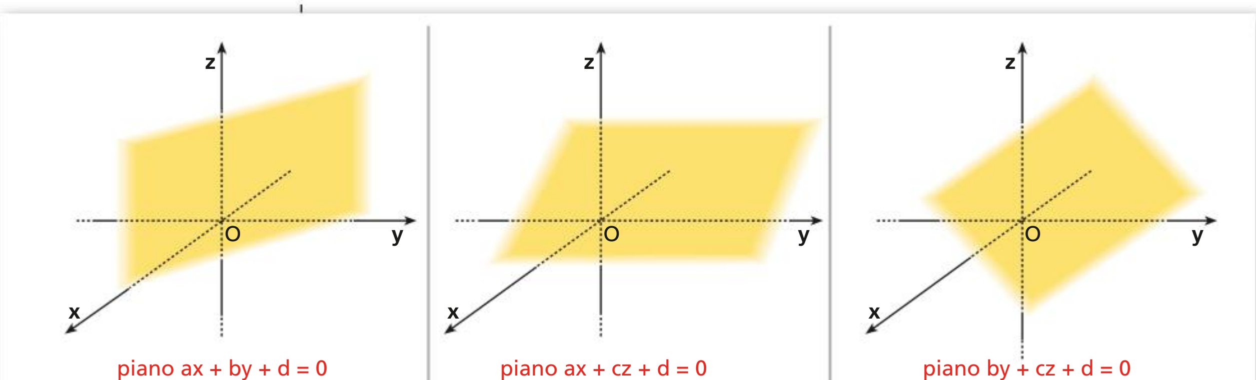
- $x = 0 \rightarrow$ piano Oyz;
- $y = 0 \rightarrow$ piano Oxz;
- $z = 0 \rightarrow$ piano Oxy;
- $x = k \rightarrow$ piano parallelo al piano Oyz;
- $y = k \rightarrow$ piano parallelo al piano Oxz;
- $z = k \rightarrow$ piano parallelo al piano Oxy.

I piani Oyz, Oxz e Oxy vengono anche detti **piani coordinati**.



▶ Disegna il piano di equazione $2x + y - 3 = 0$.

Inoltre, se nell'equazione $ax + by + cz + d = 0$ una sola variabile ha coefficiente 0, il corrispondente piano è parallelo all'asse di tale variabile, e perciò perpendicolare al piano individuato dagli assi delle altre due variabili (figura sotto).



a. $c = 0$: il piano è parallelo all'asse z e perpendicolare al piano Oxy.
b. $b = 0$: il piano è parallelo all'asse y e perpendicolare al piano Oxz.
c. $a = 0$: il piano è parallelo all'asse x e perpendicolare al piano Oyz.

Nel piano, l'equazione di una retta passante per un punto assegnato $P(x_0; y_0)$ è del tipo $a(x-x_0)+b(y-y_0)=0$ oppure, se $b \neq 0$, $y-y_0=m(x-x_0)$, con $m=-\frac{a}{b}$. Analogamente, nello spazio, l'equazione di un piano passante per un punto $P(x_0; y_0; z_0)$ è:

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$$

oppure

$$z-z_0=p(x-x_0)+q(y-y_0), \qquad \text{con } p=-\frac{a}{c}, q=-\frac{b}{c}, \text{ se } c\neq 0.$$

3 Funzioni di due variabili

In fisica, economia e diverse altre discipline, ci sono molte grandezze che dipendono da più di una variabile. Per esempio:

- il volume occupato da un gas dipende dalla pressione e dalla temperatura;
- lo sconto su un oggetto acquistato dipende dal prezzo e dalla percentuale di sconto applicata.

DEFINIZIONE

Una **funzione reale di due variabili reali** è una relazione che associa a ogni coppia ordinata di numeri reali $(x; y)$, appartenente a un sottoinsieme S di $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, uno e un solo numero reale z.
La indichiamo con $z=f(x; y)$, oppure:

$$f:(x; y)\mapsto z, \qquad \text{con } (x; y)\in S\subseteq \mathbb{R}\times\mathbb{R}, z\in\mathbb{R}.$$

ESEMPIO

$z=3x+2xy$ è una funzione di due variabili. x e y sono le variabili indipendenti, z è la variabile dipendente.

Il sottoinsieme S è il **dominio** della funzione e l'insieme dei valori corrispondenti z è il **codominio** della funzione.

Ricerca del dominio

▶ Esercizi a p. 1141

Il **dominio naturale** di una funzione $z=f(x; y)$, detto anche **campo di esistenza**, è l'insieme di *tutte* le coppie $(x; y)$ appartenenti a $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ per le quali la funzione è definita. Esso è quindi il più ampio dominio che possiamo scegliere per la funzione. Per brevità lo indicheremo soltanto con **dominio**.

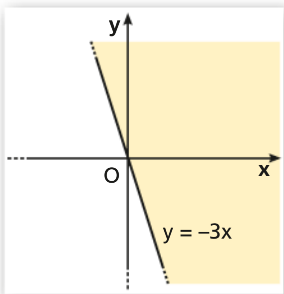
ESEMPIO

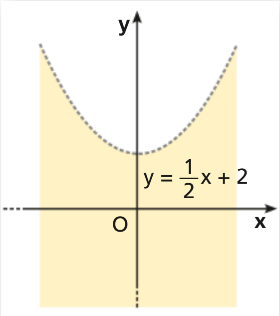
Determiniamo il dominio della funzione $z=\sqrt{3x+y}+1$.

Il dominio è l'insieme delle coppie $(x; y)$ che soddisfano le condizioni di esistenza della radice, cioè l'insieme delle soluzioni della disequazione:

$$3x+y\geq 0 \;\rightarrow\; y\geq -3x.$$

Nella figura a fianco è rappresentato il semipiano corrispondente al dominio della funzione.





ESEMPIO

Determiniamo il dominio della funzione $z = x + \log(x^2 - 2y + 4)$.

L'argomento del logaritmo deve essere maggiore di 0, poniamo la condizione:

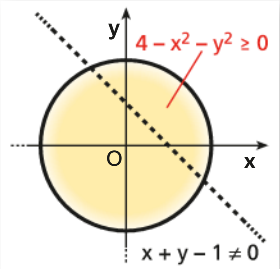
$$x^2 - 2y + 4 > 0 \rightarrow y < \frac{1}{2}x^2 + 2.$$

La curva associata alla disequazione è una parabola. Disegniamo la parabola nel piano Oxy e scegliamo come punto di prova l'origine O.

$$0 < \frac{1}{2} \cdot 0 + 2 \rightarrow 0 < 2.$$

La disequazione è soddisfatta, quindi la parte di piano che rappresenta il dominio è quella che contiene O.

► Trova il dominio della funzione $z = \ln(x^2 + y^2 - 4)$.



ESEMPIO

Determiniamo il dominio della funzione $z = \dfrac{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}{x + y - 1}$.

Dobbiamo imporre contemporaneamente due condizioni:

- che il radicando sia positivo o nullo;
- che il denominatore sia diverso da 0.

Dobbiamo pertanto risolvere il sistema $\begin{cases} 4 - x^2 - y^2 \geq 0 \\ x + y - 1 \neq 0 \end{cases}$.

Procediamo graficamente.
Il dominio della funzione è costituito da tutte le coppie di numeri reali che sono le coordinate di punti appartenenti alla parte di piano colorata nella figura a fianco, compresi quelli appartenenti alla circonferenza, ma esclusi i punti appartenenti alla retta $x + y - 1 = 0$.

Grafico di una funzione di due variabili

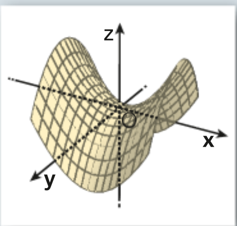
Nello spazio cartesiano, il **grafico** di una funzione $z = f(x; y)$ è l'insieme dei punti di coordinate $(x; y; z)$ per cui sussiste la relazione $z = f(x; y)$.
Mentre il dominio di una funzione, essendo costituito da coppie di $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, è rappresentabile nel piano Oxy, il grafico di una funzione è in generale una superficie nello spazio e quindi la sua rappresentazione è più complessa.

Grafici per punti

Costruire grafici per punti è il metodo usato da un elaboratore elettronico, e si dimostra particolarmente efficace se attuato per un numero molto elevato di punti.

MATEMATICA AL COMPUTER

Grafici 3D Nel Web sono disponibili programmi che, digitata l'equazione di una funzione di due variabili, forniscono il suo grafico in tre dimensioni. Utilizzane uno per realizzare alcuni grafici. Per esempio, in figura riportiamo quello di $z = x^2 - y^2$.

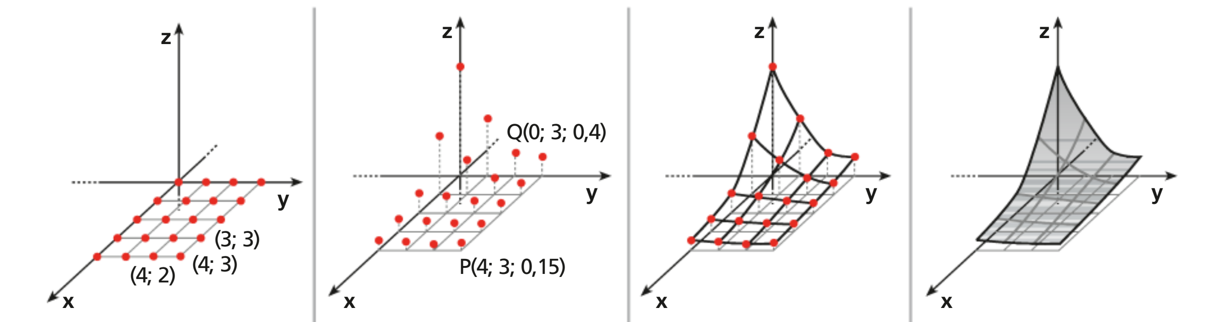


Cerca nel Web: grafico funzione due variabili online

ESEMPIO

Rappresentiamo la funzione $z = \dfrac{4}{x^2 + y^2 + 1}$.

Notiamo che il dominio della funzione è $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ in quanto il denominatore della frazione non è mai nullo.
Non potendo rappresentare la funzione in tutto $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, studiamo il suo grafico in un dominio più ristretto. Se costruiamo un reticolo sul piano Oxy (per esempio, tracciando rette parallele agli assi x e y per i punti degli assi che hanno coordinate intere e positive) e per ogni punto del reticolo calcoliamo i corrispondenti valori di z, otteniamo la figura seguente.

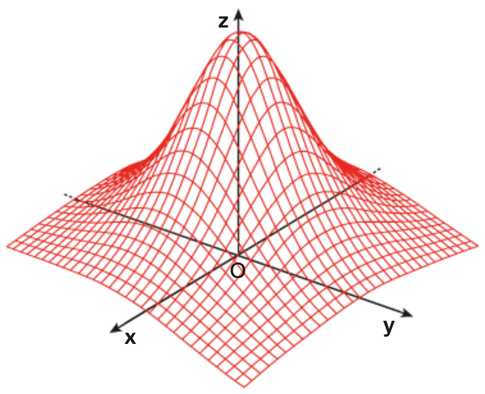


a. Tracciamo i lati di un reticolo nel piano *xy*.

b. Innalziamo le quote da ciascun nodo.

c. Congiungiamo i punti ottenuti con delle linee.

d. Otteniamo la rappresentazione della superficie nello spazio.



Con l'aiuto del computer si ottengono rapidamente grafici per punti basati su un reticolo con un numero molto elevato di nodi, come nella figura a fianco. La rappresentazione è comunque parziale e approssimata, ma riesce a dare un'idea dell'andamento della funzione.

Linee di livello

Un altro modo per rappresentare una superficie è quello delle *linee di livello*.

DEFINIZIONE

Una **linea di livello** è l'insieme delle proiezioni ortogonali sul piano Oxy dei punti di una superficie che hanno tutti la stessa quota $z = k$.

La proiezione ortogonale di un punto P su un piano α è il punto di intersezione fra il piano e la retta passante per P e perpendicolare ad α.

Una linea di livello si ottiene anche proiettando sul piano Oxy l'intersezione fra la superficie e un piano parallelo al piano Oxy.

Per farci un'idea dell'andamento di una funzione possiamo considerare le linee di livello associate alla superficie che rappresenta la funzione, assegnando a ogni linea il corrispondente valore della quota del piano secante $z = k$.

Listen to it

Given a function of two variables, we call a **contour line** any *curve* in two dimensions on which the function has a *constant value*.