

Teorema di Pitagora : In un triangolo rettangolo il quadrato costruito sull'ipotenusa è uguale alla somma dei quadrati costruiti sui cateti

$$a^2 + b^2 = c^2,$$

da cui, per le proprietà sulle equazioni, si ricavano le seguenti uguaglianze:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} \quad a^2 = c^2 - b^2 \quad a = \sqrt{c^2 - b^2} \quad b^2 = c^2 - a^2 \quad b = \sqrt{c^2 - a^2}$$

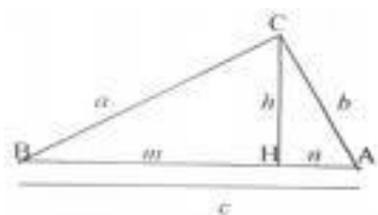
Teorema di Pitagora (conoscendo i due cateti) :

<https://www.youtube.com/watch?v=LbR0i-d3IAA>

Teorema di Pitagora (conoscendo l'ipotenusa ed un cateto):

<https://www.youtube.com/watch?v=hZjRYBuGMLM>

PRIMO TEOREMA DI EUCLIDE



In ogni triangolo rettangolo ciascun cateto è medio proporzionale tra l'ipotenusa e la sua proiezione sull'ipotenusa

$$c : a = a : m$$

$$c : b = b : n$$

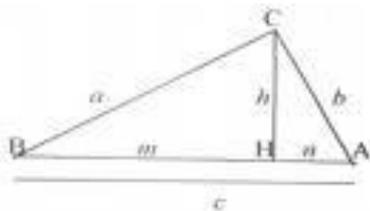
anche in questo caso, dalle proprietà sulle proporzioni si ricavano, tra le altre, le seguenti uguaglianze (mi riferisco solo alla prima proporzione):

$$c \cdot m = a^2 \quad a = \sqrt{c \cdot m} \quad c = \frac{a^2}{m} \quad m = \frac{a^2}{c}$$

Videolezione su Primo Teorema di Euclide:

<https://www.youtube.com/watch?v=HULcqX1Z2uE>

SECONDO TEOREMA DI EUCLIDE



In ogni triangolo rettangolo l'altezza relativa all'ipotenusa è medio proporzionale tra le proiezioni dei cateti sull'ipotenusa

$$m : h = h : n$$

Anche qui, si riescono a ricavare tante uguaglianze, sfruttando le proprietà delle proporzioni:

$$h^2 = m \cdot n \quad h = \sqrt{m \cdot n} \quad m = \frac{h^2}{n} \quad n = \frac{h^2}{m}$$

Videolezione Secondo Teorema di Euclide:

<https://www.youtube.com/watch?v=u0aKz2GQUHs>

Nelle pagine successive sono state applicate queste proprietà per risolvere alcuni problemi di geometria.

Dopo aver rivisto le proprietà delle proporzioni e delle percentuali , completa la seguente tabella, applicando i teoremi di Pitagora ed Euclide

Ipotenusa	1° cateto	2° cateto	Proiezione del 1° cateto sull'ipotenusa	Proiezione del 2° cateto sull'ipotenusa	Altezza relativa all'ipotenusa	Perimetro	Area
	75% del 2° cateto	80 m					
35 m		28 m					
30 cm				64% ipotenusa			
			7,2 cm	12,8 cm			
	165 cm						18150 cm ²
			9 cm		12 cm		

Problemi svolti con Teorema di Pitagora ed Euclide

<https://www.matematicapovolta.it/teoremadiPitagora.html>

Soluzione proposta

- Nel Primo triangolo conosciamo solo un cateto (80m) e , in più, sappiamo che l'altro cateto è il 75 % del primo cateto (cioè $\frac{3}{4}$), perciò vale 60 m ($\frac{3}{4} \cdot 80m = 60m$). Applicando il Teorema di Pitagora individuiamo immediatamente l'ipotenusa...

$$Ipotenusa = \sqrt{(c_1)^2 + (c_2)^2} = \sqrt{(6 \cdot 10)^2 + (8 \cdot 10)^2} = \sqrt{10^2(36 + 64)} = \sqrt{10^2 \cdot 10^2} = 100m$$

(ho applicato proprietà delle potenze per semplificare i calcoli)

A questo punto possiamo già calcolare l'area ed il perimetro AREA= $2400 m^2$ e Perimetro= $100m + 60m + 80m = 240 m$

Possiamo applicare il primo teorema di Euclide per ricavare una proiezione del cateto sull'ipotenusa (conoscendo un cateto e l'ipotenusa stessa)

Ipotenusa:Cateto=Cateto:proiezione cateto su ipotenusa

Ovvero un cateto è medio proporzionale tra l'ipotenusa e la sua proiezione del cateto sulla stessa.

$$\text{Perciò } \text{ProiezioneCateto1} = \frac{60m \cdot 60m}{100m} = 36m \quad \text{ProiezioneCateto2} = \frac{80m \cdot 80m}{100m} = 64m$$

Applicando il secondo teorema di Euclide, invece, ricaviamo l'ultimo dato e cioè l'altezza relativa all'ipotenusa, che è medio proporzionale tra le proiezioni dei due cateti, perciò

$$\text{AltezzarelativaIpotenusa} = \sqrt{64m \cdot 36m} = \sqrt{8^2 m \cdot 6^2 m} = 48m$$

- Nel secondo triangolo si applica il Teorema di Pitagora, utilizzando i dati in nostro possesso e cioè ipotenusa ed un cateto, per cui ottengo che il cateto mancante è dato da

$$\sqrt{(35m)^2 - (28m)^2} = 21m$$

Tutti gli altri dati si trovano con lo stesso ragionamento adottato per il primo triangolo (ve lo lascio come esercizio). Vi dico solo che i risultati sono , rispettivamente: $\frac{63}{5}m \equiv 12.6m$, $\frac{112}{5}m \equiv 22.4m$ $\frac{84}{5}m \equiv 16.8m$, $84m, 294m^2$

- Nel terzo triangolo , per prima cosa calcoliamo la proiezione del secondo cateto sull'ipotenusa, che è il 64% dell'ipotenusa stessa e cioè $\frac{64}{100} \cdot 30cm = \frac{96}{5}cm = 19.2cm$

A questo punto applichiamo il primo teorema di Euclide, per calcolare il secondo cateto e abbiamo

$$\text{Secondocateto} = \sqrt{30cm \cdot \frac{96}{5}cm} = \sqrt{576cm^2} = 24cm$$

Applicando il teorema di Pitagora, troviamo l'altro cateto $\sqrt{(30cm)^2 - (24cm)^2} = \sqrt{324cm^2} = 18cm$

Possiamo già calcolare l'area $\frac{18cm \cdot 24cm}{2} = 216cm^2$ e perimetro $30cm + 24cm + 18cm = 72cm$

Passiamo al calcolo della misura delle lunghezze dei due cateti relativi all'ipotenusa. (primo teorema di Euclide)

$$\text{Proiezione cateto1} = \frac{(24cm)^2}{30cm} = \frac{6 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 4}{6 \cdot 5}cm = \frac{96}{5}cm = 19.2cm$$

$$\text{Proiezione cateto2} = \frac{(18cm)^2}{30cm} = \frac{6 \cdot 3 \cdot 6 \cdot 3}{6 \cdot 5}cm = \frac{54}{5}cm = 10.8cm$$

Applicando, infine , il secondo teorema di Euclide, calcoliamo l'altezza relativa all'ipotenusa h.

$$H = \sqrt{10.8cm \cdot 19.2cm} =$$

$$\sqrt{\frac{96}{5} \cdot \frac{54}{5}cm^2} = cm \sqrt{\frac{2^5 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3^3}{5^2}} = cm \sqrt{\frac{2^6 \cdot 3^4}{5^2}} = \frac{2^3 \cdot 3^2}{5}cm = \frac{72}{5}cm = 14.4cm$$

Gli ultimi tre li lascio risolvere a voi, ma attenzione

Nel quarto triangolo, trasformate prima i numeri decimali in numeri frazionari.... È più semplice fare i calcoli

Quando dovete calcolare le radici quadrate... utilizzate le proprietà delle potenze, vi permettono di fare calcoli più semplici

Nel quinto triangolo semplificate..... altrimenti siete costretti a fare calcoli difficilissimi, a meno che non vogliate usare la calcolatrice, ma è molto meglio di no....se sbagliate non ve ne accorgete mai (con la calcolatrice intendo)

Da notare che il sesto triangolo è simile al primo..... e quindi possiamo applicare le proprietà della similitudine per calcolare le misure mancanti (tutti i lati sono quattro volte più piccoli dei corrispondenti nel primo triangolo..... un po' come le foto ridotte o come le icone del computer ridotte o Come le cartine geografiche in scala)

Ipotenusa	1° cateto	2° cateto	Proiezione del 1° cateto sull'ipotenusa	Proiezione del 2° cateto sull'ipotenusa	Altezza relativa all'ipotenusa	Perimetro	Area
100m	75% del 2° cateto= 60m	80 m	36m	64m	48m	240m	240m ²
35 m	21m	28 m	12.6m	22.4m	16.8m	84m	294m ²
30 cm	18cm	24cm	10.8 cm	64% ipotenusa= 19.2cm	14.4cm	72cm	216 cm ²
20cm	12cm	16cm	7,2 cm	12,8 cm	9.6cm	48cm	96 cm ²
275cm	165 cm	220cm	99cm	176cm	132cm	660m	18150 cm ²
25cm	15cm	20cm	9 cm	16cm	12 cm	60cm	150 cm ²