

Prototipo del secondo esonero di matematica**I) Risolvere le seguenti equazioni di secondo grado**

- a) $-\sqrt{2}x^2 = 0$
- b) $x^2 + 1 = 0$
- c) $6x^2 - 24 = 0$
- d) $5x - 7x^2 = 0$

Soluzione proposta

- a) Dividendo per $-\sqrt{2}$ ambo i membri, si ha $x^2 = 0$, per cui la soluzione (doppia) è $x=0$
- b) Aggiungendo -1 al primo ed al secondo membro si ha $x^2 = -1$, ovvero $x = \pm\sqrt{-1}$ che non ammette soluzioni, almeno nel campo dei numeri reali
- c) Sommando ad ambo i membri $+24$ si ha $6x^2 = 24$, e dividendo per 6 sia il primo che il secondo membro si ha $x^2 = 4$, da cui $x = \pm\sqrt{4}$, cioè $x_1 = -2$, $x_2 = +2$
- d) Raggruppando si ha $x(5 - 7x) = 0$, da cui $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{5}{7}$

II) Risolvere le seguenti equazioni di secondo grado complete

- a) $x^2 - 11x + 24 = 0$
- b) $x^2 + x + 4 = 0$

Soluzione proposta

- a) Nel primo caso $\Delta = b^2 - 4ac = 121 - 96 = 25 > 0$, per cui l'equazione ammette due soluzioni distinte

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{11 - 5}{2} = 3$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{11 + 5}{2} = 8$$

- b) Nel secondo caso $\Delta = b^2 - 4ac = 1 - 16 = -15 < 0$
- c) Per cui l'equazione non ammette soluzioni nel campo dei numeri reali

III) Trovare la lunghezza dei tre cateti di un triangolo rettangolo, sapendo che:

a) L'ipotenusa è lunga 50 metri

b) Un cateto è i $\frac{3}{4}$ dell'altro cateto

Soluzione proposta

Qui si tratta di capire quali equazioni permettono di risolvere il problema. Conviene indicare con x uno dei due cateti (il più grande, ad esempio), per cui si ha, per il teorema di Pitagora che

$$x^2 + \left(\frac{3}{4}x\right)^2 = 2500 \quad , \quad \text{cioè} \quad x^2 + \frac{9}{16}x^2 = 2500, \quad \text{ovvero} \quad \frac{16x^2 + 9x^2}{16} = 2500, \quad \text{da cui}$$
$$\frac{25x^2}{16} = 2500$$

Qui si possono moltiplicare entrambi i membri per $\frac{16}{25}$, per poter ottenere

$$x^2 = \frac{2500 \cdot 16}{25} = \frac{100 \cdot 16}{1} = 10^2 \cdot 4^2 = 40^2$$

Ora, se il quadrato di x è uguale al quadrato di 40, allora x non può che essere 40 metri (si esclude la soluzione $x=-40$, perché una lunghezza non può assumere valori negativi)

A questo punto l'altro cateto (il più piccolo) è i $\frac{3}{4}$ di 40 metri, cioè 30 metri

E l'ipotenusa è effettivamente 50 metri

Tempo a disposizione : 90 minuti